Verso l'algebra astratta

Insiemi

Individua la risposta esatta.

1 Un insieme è finito se:

a è formato da pochi elementi.
b è possibile elencare tutti i suoi elementi.
c è sottoinsieme di in un insieme infinito.

La risposta esatta è b, infatti un insieme è finito se è possibile elencare tutti gli elementi che vi appartengono, indipendentemente dal fatto che questi siano pochi o molti. La risposta c è errata, perché un insieme infinito può ammettere sottoinsiemi anch'essi infiniti: ad esempio l'insieme infinito dei numeri naturali contiene il sottoinsieme dei numeri pari, anch'esso infinito.

2 Quale tra i seguenti gruppi non è un insieme?

a I fiori belli.
b I libri di una biblioteca.
c Gli animali della fattoria del signor Rossi.

La risposta esatta è a, infatti un insieme è formato da un gruppo di elementi individuati in maniera non soggettiva; la proprietà di essere belli dipende dal gusto di chi giudica. Possiamo invece dire senza ambiguità se un animale appartiene o no alla fattoria del signor Rossi, e se un libro appartiene o no ad una biblioteca.

3 Due insiemi sono disgiunti se:

a non hanno elementi in comune.
b hanno alcuni elementi in comune.
c hanno un solo elemento in comune.

Due insiemi sono disgiunti se la loro intersezione è l'insieme vuoto, ovvero non hanno elementi in comune. La risposta esatta è quindi a. Se ci fossero alcuni elementi, o anche un solo elemento in comune, essi apparterrebbero all'intersezione, e gli insiemi non sarebbero quindi disgiunti.

4 Due insiemi sono uguali se:

a hanno alcuni elementi uguali.
b hanno tutti gli elementi uguali.
c hanno almeno un elemento uguale.

In generale, un insieme è individuato dagli elementi che vi appartengono: se due insiemi hanno uno o alcuni elementi uguali, possono averne allo stesso tempo anche di diversi, e quindi essere insiemi diversi. Due insiemi che contengono esattamente gli stessi elementi, anche in ordine diverso, sono uguali. La risposta esatta è quindi b.

5 **Un insieme è vuoto se:**

a non contiene elementi.
b contiene pochi elementi.
c contiene un solo elemento.

Per definizione l'insieme vuoto, il cui simbolo è $\varnothing$, non contiene elementi. La risposta esatta è quindi **a**. Un insieme che contiene un solo elemento, o che contiene pochi elementi, differisce dall'insieme vuoto perché contiene elementi che non appartengono all'insieme $\varnothing$.

6 **Il simbolo di appartenenza è:**

a $\subset$
b $\in$
c $\notin$

Il simbolo $\subset$ viene utilizzato per indicare che un insieme è contenuto in un altro.
Il simbolo $\in$ viene utilizzato per indicare che un elemento appartiene a un insieme.
Il simbolo $\notin$ viene utilizzato per indicare che un elemento non appartiene a un insieme. La risposta esatta è quindi **b**.

7 **Qual è la rappresentazione per elencazione delle lettere della parola *marachella*?**

a $A = \{m, a, r, a, c, h, e, l, l, a\}$
b $A = \{m, r, a, c, h, e, l, a\}$
c $A = \{m, a, r, c, h, e, l\}$

Per rappresentare l'insieme richiesto bisogna elencare le lettere dell'alfabeto che compongono la parola data. Se vi sono lettere che si ripetono, vanno indicate una sola volta. La risposta esatta è quindi **c**.

8 **Quali dei seguenti insiemi A = $\{s, e, d\}$, B = $\{s, e\}$, C = $\{i, a\}$, D = $\{d, s, e\}$ sono sottoinsiemi dell'insieme U = $\{s, e, d, i, a\}$?**

a A e B.
b Tutti.
c B, C e D.

I sottoinsiemi di un insieme dato U sono insiemi i cui elementi appartengono tutti anche all'insieme U.
Nel nostro caso U è l'insieme delle lettere della parola *sedia*; gli insiemi A, B, C, D contengono ognuno alcune delle lettere della parola *sedia*, quindi sono tutti sottoinsiemi di U. La risposta esatta è quindi **b**.

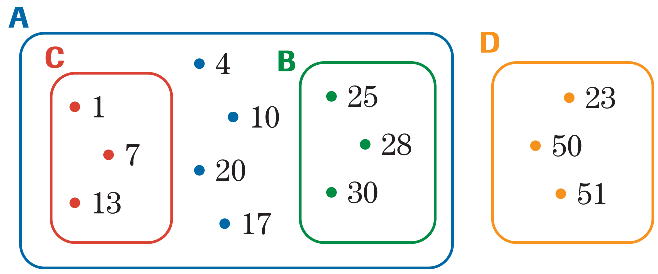
9 **Individua quali insiemi sono finiti F, quali infiniti I e quali vuoti V.**

a F I V I fiumi d'Italia.
b F I V I numeri maggiori di 2345.
c F I V Le consonanti dell'alfabeto italiano.
d F I V I numeri interi maggiori di 46 e minori di 47.
e F I V Le capitali europee.
f F I V I numeri dispari.

Un insieme è finito se è possibile elencare tutti i suoi elementi; è infinito se non è possibile elencare tutti i suoi elementi; è vuoto se non contiene elementi.

a F Si possono elencare tutti.
b I Non si possono elencare tutti.
c F L'insieme è formato da 16 elementi.
d V Non esistono numeri naturali che siano contemporaneamente maggiori di 46 e minori si 47.
e F È possibile elencare tutte le capitali.
f I Non si possono elencare tutti.

10 **Osserva gli insiemi A e D e stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**



a V F $C \subset A$
b V F $B \subset A$
c V F $D \subset A$
d V F $A = \{4, 10, 17, 20\}$
e V F B = {numeri maggiori di 20}
f V F C = {numeri dispari minori di 17}
g V F $D = \{23, 50, 51\}$

a V Tutti gli elementi di C appartengono anche ad A, quindi $C \subset A$. Osserviamo che A contiene anche elementi non appartenenti a C, quindi C è un sottoinsieme proprio di A.

b V Tutti gli elementi di B appartengono anche ad A, quindi $B \subset A$; anche in questo caso, B è un sottoinsieme proprio di A.

c F Nessun elemento di D appartiene ad A, quindi $D \not\subset A$.

d F Gli elementi di A sono gli elementi di C, di B e 4, 10, 20, 17, quindi: $A = \{1, 4, 7, 10, 13, 17, 20, 25, 28, 30\}$.

e F $B = \{25, 28, 30\}$, i suoi elementi sono tutti maggiori di 20, ma esistono infiniti altri numeri che soddisfano la richiesta. Sarebbe invece corretto scrivere $B = \{x \in A | x > 20\}$.

f F $C = \{1, 7, 13\}$, i suoi elementi sono tutti dispari e minori di 17, ma esistono altri numeri che soddisfano la richiesta. Sarebbe invece corretto scrivere $C = \{x \in A | x \text{ è dispari e } x < 17\}$.

g V Gli elementi di D sono 23, 50, 51, quindi $D = \{23, 50, 51\}$.

11 **Sono dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x < 15\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ è divisore di } 12\}$; determina i seguenti insiemi: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.**

Gli insiemi A e B, scritti per elencazione, sono:
$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
L'unione di due insiemi A e B è l'insieme degli elementi che appartengono ad A o a B, quindi:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$
L'intersezione di due insiemi A e B è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A sia a B, quindi:
$A \cap B = \{2, 3, 4, 6, 12\}$
La differenza tra due insiemi A e B, considerati nell'ordine, è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B, quindi:
$A - B = \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14\}$
$B - A = \{1\}$

Funzioni

Individua la risposta corretta.

12 **Data la funzione** $f(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{2}x+1$, **il valore di** $\sqrt{f(-2)}\cdot f(2)$ **è:**

- **a** -9
- **b** $+2$
- **c** -3

Se $f(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{2}x+1$ allora

$$\sqrt{f(-2)}=\sqrt{\frac{3}{4}(-2)^2-\frac{5}{2}(-2)+1}=\sqrt{3+5+1}=\sqrt{9}=3$$

$$f(2)=\frac{3}{4}(2)^2-\frac{5}{2}(2)+1=3-5+1=-1$$

Il valore numerico di $\sqrt{f(-2)}\cdot f(2)$ è $3\cdot(-1)=-3$.

La risposta esatta è quindi **c**.

13 **Sapendo che** $f(a)=3a^2-7a+1$, $g(x)=\frac{1}{4}x^2-16x+4$ **e** $h(y)=\frac{y^2}{4}-\frac{y}{2}+12$, **il valore numerico di** $\frac{f(1)\cdot g(-2)}{h(-4)}$ **è:**

- **a** $-\frac{37}{6}$
- **b** $\frac{37}{6}$
- **c** $-\frac{6}{37}$

Abbiamo:

$$f(1)=3(1)^2-7(1)+1=3-7+1=-3$$

$$g(-2)=\frac{1}{4}(-2)^2-16(-2)+4=1+32+4=37$$

$$h(-4)=\frac{(-4)^2}{4}-\frac{-4}{2}+12=\frac{16}{4}+\frac{4}{2}+12=4+2+12=18$$

Il valore numerico di $\frac{f(1)\cdot g(-2)}{h(-4)}$ è $\frac{-3\cdot 37}{18}=-\frac{37}{6}$.

La risposta esatta è **a**.

14 **Data la funzione** $f(a)=3a^3-2a^2-a-1$, **il valore numerico di** $f\left(\sqrt{9}\right)+f\left[(-1)^3\right]$ **è:**

- **a** -54
- **b** $+54$
- **c** $+64$

Abbiamo:

$$f\left(\sqrt{9}\right)=f(3)=3(3)^3-2(3)^2-(3)-1=81-18-3-1=59$$

$$f\left[(-1)^3\right]=f(-1)=3(-1)^3-2(-1)^2-(-1)-1=-3-2+1-1=-5$$

Il valore numerico di $f\left(\sqrt{9}\right)+f\left((-1)^3\right)$ è quindi $59-5=54$.

La risposta esatta è **b**.

Operazioni binarie e strutture algebriche

15 **La legge di composizione rappresentata in tabella è legge di composizione interna? Qual è l'insieme A su cui è definita la legge?**

$*$	a	b	c
a	a	a	c
b	a	c	a
c	b	b	b

L'insieme su cui è definita la legge di composizione $*$ è $A = \{a, b, c\}$. Su un insieme A è definita una legge di composizione interna $*$ se a ciascuna coppia di elementi di A si associa sempre un terzo elemento che appartiene ad A; osservando la tabella di composizione si vede che per ogni coppia di elementi si ottiene sempre un elemento dell'insieme considerato, quindi la legge $*$ è di composizione interna.

16 **Studia l'operazione $\perp$ la cui legge di composizione è data dalla seguente tabella. La struttura è un gruppo?**

$\perp$	–1	0	2
–1	–1	0	2
0	0	2	–1
2	2	–1	0

Osservando la tabella a doppia entrata si ricava l'insieme su cui si opera: $A = \{-1, 0, 2\}$.

1) In tabella si vede che $\perp$ è una legge di composizione interna perché in essa compaiono solo gli elementi dell'insieme di partenza $A = \{-1, 0, 2\}$.

2) La legge di composizione è commutativa se $\forall\ a, b \in A$ si ha $a \perp b = b \perp a$.

$$\left.\begin{array}{l} -1 \perp 0 = 0 \\ 0 \perp -1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ -1 \perp 0 = 0 \perp -1$$

$$\left.\begin{array}{l} -1 \perp 2 = 2 \\ 2 \perp -1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ -1 \perp 2 = 2 \perp -1$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \perp 2 = -1 \\ 2 \perp 0 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 0 \perp 2 = 2 \perp 0$$

La legge di composizione $\perp$ data è commutativa.
Per verificare velocemente se una legge di composizione è commutativa basta compilare la tabella di composizione e osservare che gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono uguali. Riscriviamo la tabella di composizione data, tracciamo la diagonale principale e osserviamo che gli elementi simmetrici sono uguali.

$\perp$	–1	0	2
–1	–1	0	2
0	0	2	–1
2	2	–1	0

3) La legge di composizione $\perp$ è associativa se $\forall\ a, b, c \in$ A si ha:
$(a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$.

$$\left.\begin{array}{l}(-1 \perp 0) \perp 2 = 0 \perp 2 = -1 \\ -1 \perp (0 \perp 2) = -1 \perp -1 = -1\end{array}\right\} \Rightarrow (-1 \perp 0) \perp 2 = -1 \perp (0 \perp 2)$$

$$\left.\begin{array}{l}(-1 \perp 2) \perp 0 = 2 \perp 0 = -1 \\ -1 \perp (2 \perp 0) = -1 \perp -1 = -1\end{array}\right\} \Rightarrow (-1 \perp 2) \perp 0 = -1 \perp (2 \perp 0)$$

$$\left.\begin{array}{l}(-1 \perp -1) \perp 2 = -1 \perp 2 = 2 \\ -1 \perp (-1 \perp 2) = -1 \perp 2 = 2\end{array}\right\} \Rightarrow (-1 \perp -1) \perp 2 = -1 \perp (-1 \perp 2)$$

$$\left.\begin{array}{l}(2 \perp -1) \perp 0 = 2 \perp 0 = -1 \\ 2 \perp (-1 \perp 0) = 2 \perp 0 = -1\end{array}\right\} \Rightarrow (2 \perp -1) \perp 0 = 2 \perp (-1 \perp 0)$$

$$\left.\begin{array}{l}(0 \perp 2) \perp -1 = -1 \perp -1 = -1 \\ 0 \perp (2 \perp -1) = 0 \perp 2 = -1\end{array}\right\} \Rightarrow (0 \perp 2) \perp -1 = 0 \perp (2 \perp -1)$$

Procedendo in questo modo, si verifica che la legge di composizione $\perp$ data è associativa.

4) La struttura (A, $\perp$) è dotata di elemento neutro u se $\forall\ a \in$ A si verifica:
$a \perp u = u \perp a$.
L'elemento neutro, se esiste, è unico.
Per trovare l'elemento neutro di una struttura algebrica basta compilare la tabella di composizione e cercare la riga e la colonna che sono uguali alla riga e alla colonna principali: dove esse si incrociano si trova l'elemento neutro.

$\perp$	–1	0	2
–1	–1	0	2
0	0	2	–1
2	2	–1	0

Osservando la tabella si vede che la riga e la colonna da considerare sono quelle evidenziate; esse si incrociano nell'elemento –1 che è l'elemento neutro.

5) Se una struttura algebrica (A, $\perp$) ammette elemento neutro u, si dice che due elementi qualsiasi a e a', appartenenti all'insieme A, sono simmetrici se $a \perp a' = a' \perp a = u$.

Ogni elemento dotato di simmetrico si dice simmetrizzabile.
Se una legge di composizione è associativa e ha elemento neutro, allora il simmetrico di ogni elemento, se esiste, è unico.
Per verificare se un elemento ammette simmetrico, bisogna vedere nella tabella di composizione se nella riga e nella colonna dell'elemento considerato compare l'elemento neutro (nella stessa posizione).

$\perp$	–1	0	2
–1	–1	0	2
0	0	2	–1
2	2	–1	0

Se osserviamo la tabella di composizione vediamo che in ogni riga e in ogni colonna compare l'elemento neutro –1 (una sola volta e nella stessa posizione), quindi ogni elemento è simmetrizzabile: –1 è simmetrico di se stesso, 0 e 2 sono simmetrici tra loro.

Poiché la legge di composizione è interna, associativa, dotata di elemento neutro, e tale che ogni elemento è simmetrizzabile, la struttura è un gruppo. Poiché è commutativa, il gruppo è abeliano.

17 **È dato l'insieme A = $\{-m, 0, m\}$, dove m è un dato numero relativo diverso da 1, e la legge $a \otimes b = a \cdot b$. Scrivi la tabella relativa alla legge e verifica se è legge di composizione interna.**

$\otimes$	$-m$	0	m
$-m$	m^2	0	$-m^2$
0	0	0	0
m	$-m^2$	0	m^2

La legge di composizione $\otimes$ non è interna perché in tabella vi sono elementi m^2 e $-m^2$ che (essendo $m \neq 1$) non appartengono all'insieme A di partenza.

Relazioni

18 **Tra gli insiemi A = $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}$ e B = $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ è definita la relazione: $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b = 2a$. Determina dominio, codominio e la relazione inversa $\mathcal{R}^{-1}$.**

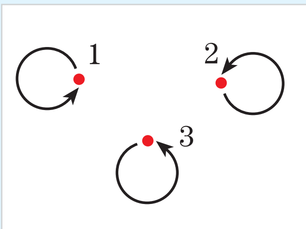
Scriviamo per elencazione i due insiemi:
A = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ B = $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
La relazione è $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b = 2a$, cioè un elemento appartenente all'insieme B è in relazione con un elemento dell'insieme A se è il suo doppio; quindi:

$2 \in$ B è doppio di $1 \in$ A
$4 \in$ B è doppio di $2 \in$ A
$6 \in$ B è doppio di $3 \in$ A
$8 \in$ B è doppio di $4 \in$ A
$10 \in$ B è doppio di $5 \in$ A

Perciò il dominio è: D = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ = A; il codominio è: C = $\{2, 4, 6, 8, 10\} \subset$ B.

La relazione inversa è $b\mathcal{R}^{-1}a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}b$.

19 **Osserva il seguente diagramma sagittale e determina le proprietà della relazione rappresentata.**

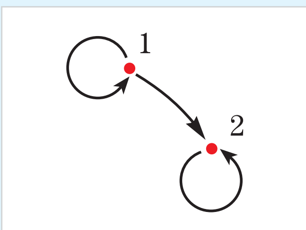


La relazione è riflessiva perché ogni elemento ha il cappio, e ciò significa che:

$1\mathcal{R}1$ $2\mathcal{R}2$ $3\mathcal{R}3$

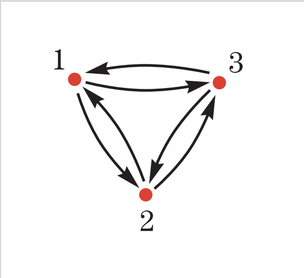
Quindi ogni elemento dell'insieme dato è in relazione con se stesso, cioè $\forall a \in A \Rightarrow a\mathcal{R}a$.

20 **Osserva il seguente diagramma sagittale e determina le proprietà della relazione rappresentata.**



La relazione rappresentata è:
- riflessiva perché 1 e 2 hanno il cappio;
- antisimmetrica perché da 1 parte la freccia diretta a 2, ma da 2 non parte la freccia diretta a 1, cioè vale la proprietà $\forall a \neq b \quad a\mathcal{R}b \Rightarrow b\not\mathcal{R}a$.

21 **Osserva il seguente diagramma sagittale e determina le proprietà della relazione rappresentata.**



La relazione rappresentata è:

- antiriflessiva perché nessun elemento dell'insieme ha il cappio, quindi $\forall a \in A \Rightarrow a \not\mathcal{R} a$.
- simmetrica perché per ogni coppia di elementi dell'insieme dato risulta $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$ infatti tra 1 e 2, 2 e 3, 1 e 3 c'è la doppia freccia.

Logica

22 **Calcola il valore di verità delle seguenti espressioni logiche.**

a $[(p \vee q) \wedge r] \vee s$ sapendo che $p = \text{F}$, $q = \text{V}$, $r = \text{F}$, $s = \text{V}$.
b $(p \wedge q) \vee [(q \vee r) \wedge (r \wedge s)]$ sapendo che $p = \text{V}$, $q = \text{F}$, $r = \text{V}$, $s = \text{V}$.

a Compiliamo la tabella con le condizioni date per gli enunciati p, q, r, s:

p	q	r	s	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$[(p \vee q) \wedge r] \vee s$
F	V	F	V	V	F	V

Quindi il valore di verità dell'espressione logica data è FALSO.

b Compiliamo la tabella con le condizioni date per gli enunciati p, q, r, s:

p	q	r	s	$p \wedge q$	$q \vee r$	$r \wedge s$	$[(q \vee r) \wedge (r \wedge s)]$	$(p \wedge q) \vee [(q \vee r) \wedge (r \wedge s)]$
V	F	V	V	F	V	V	V	V

Il valore di verità dell'espressione logica data è VERO.

23 **Quale deve essere il valore di verità dell'enunciato p per verificare le seguenti equazioni logiche?**

a $(\text{F} \wedge p) \wedge \text{V} = \text{F} \quad \Rightarrow p =$ ....
b $[\text{F} \vee (\text{V} \vee \text{V})] \wedge p = \text{F} \quad \Rightarrow p =$ ....
c $[\text{F} \wedge (\text{F} \vee \text{V})] \vee p = \text{V} \quad \Rightarrow p =$ ....

a Se $(\text{F} \wedge p) \wedge \text{V} = \text{F}$ l'espressione $(\text{F} \wedge p)$ deve essere falsa, ma la congiunzione $\wedge$ rende falsa la proposizione se si ha $\text{F} \wedge \text{F}$ oppure $\text{F} \wedge \text{V}$, quindi l'enunciato p può essere sia VERO che FALSO.

b Dal testo possiamo ricavare il valore di verità di $[\text{F} \vee (\text{V} \vee \text{V})]$:
$[\text{F} \vee (\text{V} \vee \text{V})] = [\ \text{F} \vee \text{V}\ ] = \text{V}$
quindi l'equazione logica diventa:
$\text{V} \wedge p = \text{F} \quad \Rightarrow \quad p =$ FALSO

c Dal testo possiamo ricavare il valore di verità di $[\text{F} \wedge (\text{F} \vee \text{V})]$:
$\text{F} \wedge (\text{F} \vee \text{V}) = \text{F} \wedge \text{V} = \text{F}$
quindi l'equazione logica diventa:
$\text{F} \vee p = \text{V} \quad \Rightarrow \quad p =$ VERO

Probabilità

Scegli la risposta corretta.

24 **La probabilità che, nel lancio di un dado, esca un numero maggiore di 3 è:**

a 0

b $\frac{1}{2}$

c $\frac{2}{3}$

La probabilità di un evento è data dal rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.
In questo caso i casi favorevoli sono 3 (uscita del numero 4 o 5 o 6), mentre i casi possibili sono pari al numero delle facce di un dado, cioè 6.
La probabilità richiesta è $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

25 **La probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte una figura di seme rosso è:**

a $\frac{1}{2}$

b $\frac{1}{4}$

c $\frac{3}{20}$

Il numero dei casi favorevoli, cioè il numero di figure di seme rosso, è 6 (3 figure di cuori e 3 di quadri); i casi possibili sono pari al numero totale delle carte, cioè 40, quindi: $P = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$.

26 **Sapendo che la probabilità dell'evento *A* è 0,32 e che i casi possibili sono 75, i casi favorevoli:**

a sono $\frac{1}{24}$.

b sono 24.

c non sono determinabili.

La probabilità di un evento è $P = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$, quindi:

$0{,}32 = \frac{\text{casi favorevoli}}{75}$ da cui segue: casi favorevoli $= 0{,}32 \cdot 75 = 24$.

27 **Se lancio due dadi la probabilità che la somma dei punteggi sia un numero minore di 8 è:**

a $\frac{7}{36}$

b $\frac{7}{12}$

c $\frac{13}{18}$

Rappresentiamo la situazione con una tabella a doppia entrata mettendo in riga e in colonna i numeri di ciascuna faccia dei due dadi e compiliamo la tabella applicando l'operazione di addizione.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Se la richiesta è "la somma dei punteggi sia un numero minore di 8" in tabella dobbiamo contare tutti i valori minori o uguali a 7, che sono 21.
Casi favorevoli = 21; casi possibili = 36, quindi:

$P = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$