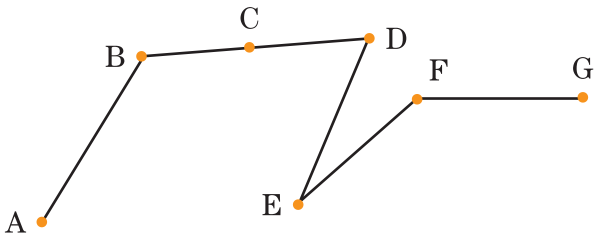
Geometria euclidea e analitica

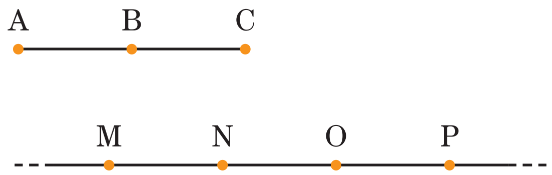
1 **Osserva la spezzata e stabilisci quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.**



a V F AB è consecutivo a BC.
b V F DE è consecutivo a FG.
c V F BC è consecutivo a CD.
d V F BC è adiacente a CD.
e V F AB è consecutivo a CD.
f V F EF è consecutivo a FG.

a V Il segmento AB è consecutivo al segmento BC perché ha in comune con esso solo l'estremo B.
b F I segmenti DE ed FG non sono consecutivi perché non hanno un estremo in comune.
c V Il segmento BC è consecutivo al segmento CD perché ha in comune con esso solo l'estremo C. In particolare, i due segmenti giacciono sulla stessa retta, quindi sono anche adiacenti.
d V Il segmento BC è adiacente al segmento CD perché è ad esso consecutivo e giace sulla stessa retta.
e F I segmenti AB ed CD non sono consecutivi perché non hanno nessun estremo in comune.
f V Il segmento EF è consecutivo al segmento FG perché ha in comune con esso solo l'estremo F.

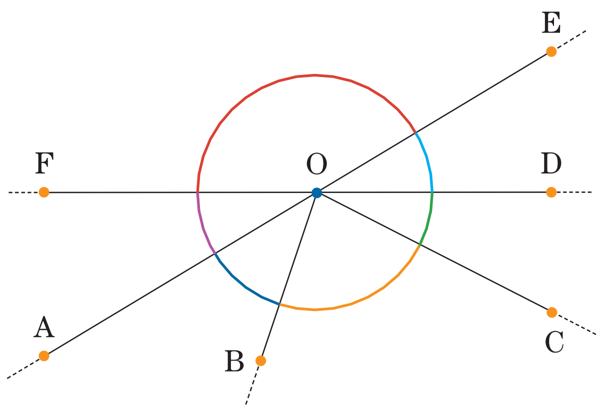
2 **Osserva i seguenti segmenti e stabilisci quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.**



a V F AB è consecutivo a BC.
b V F BC è adiacente a AB.
c V F MN è adiacente a OP.
d V F NO è adiacente a MN e a OP.
e V F MO è consecutivo a ON.

a V Il segmento AB è consecutivo al segmento BC perché ha in comune con esso solo l'estremo B.
b V Il segmento BC è adiacente al segmento AB perché è ad esso consecutivo e giace sulla stessa retta.
c F I segmenti MN ed OP non sono adiacenti perché, pur giacendo sulla stessa retta, non hanno nessun estremo in comune.
d V Il segmento NO è adiacente al segmento MN perché ha l'estremo N in comune e giace sulla stessa retta, ed è adiacente al segmento OP perché ha l'estremo O in comune e giace sulla stessa retta.
e F Il segmento NO è tutto contenuto nel segmento MO, quindi essi non hanno un solo estremo in comune.

3 **Osserva gli angoli e stabilisci quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.**



a V F AÔB e BÔC sono consecutivi.
b V F BÔC e DÔE sono consecutivi.
c V F BÔC e CÔD sono consecutivi.
d V F AÔB e BÔE sono adiacenti.
e V F AÔF e FÔE sono adiacenti.
f V F AÔB e DÔE sono opposti al vertice.
g V F AÔF e EÔD sono opposti al vertice.

a V AÔB e BÔC sono consecutivi perché hanno in comune il vertice O e il lato OB.
b F BÔC e DÔE non sono consecutivi perché hanno in comune solo il vertice O.
c V BÔC e CÔD sono consecutivi perché hanno in comune il vertice O e il lato OC.
d V AÔB e BÔE sono adiacenti perché sono consecutivi e i lati OA e OE sono semirette opposte.
e V AÔF e FÔE sono adiacenti perché sono consecutivi e i lati OA e OE sono semirette opposte.
f F AÔB e DÔE non sono opposti al vertice perché il lato OD non è il prolungamento del lato OB.
g V AÔF e EÔD sono opposti al vertice perché il lato OF è il prolungamento del lato OD e il lato OA è il prolungamento del lato OE.

4 **Stabilisci quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.**

a V F La somma di due angoli acuti è sempre un angolo acuto.
b V F Un angolo concavo può essere acuto.
c V F Un angolo acuto ed uno ottuso possono essere complementari.
d V F Due angoli adiacenti sono anche supplementari.
e V F Un angolo convesso è sempre ottuso.
f V F Due angoli supplementari sono sempre adiacenti.
g V F Due rette incidenti determinano quattro angoli uguali.
h V F Due rette perpendicolari determinano quattro angoli uguali.

a F Due angoli acuti potrebbero avere ampiezza tale che la loro somma superi i 90°: ad esempio 40° (acuto) + 70° (acuto) = 110° (ottuso).
b F Un angolo concavo è sicuramente maggiore di un angolo piatto e quindi non può essere acuto perché un angolo acuto è minore di un angolo retto.
c F Due angoli sono complementari se la loro somma è un angolo retto, quindi devono essere entrambi acuti.
d V I lati non comuni di due angoli adiacenti sono semirette opposte che formano un angolo piatto.
e F Un angolo convesso è minore di un angolo piatto, ma potrebbe essere maggiore di un angolo retto.
f F Due angoli sono supplementari quando la loro somma è un angolo piatto, ma potrebbero essere disposti in modo qualsiasi senza necessariamente avere il vertice e un lato in comune.
g F Solo due rette perpendicolari determinano quattro angoli uguali.
h V È la definizione di rette perpendicolari.

5 **Completa.**

a Il supplementare di un angolo di 110° misura ....
b Il complementare di un angolo di 85° misura ....
c Il supplementare di un angolo di 90° misura ....
d Il complementare di un angolo di 45° misura ....

a Due angoli supplementari hanno per somma 180°, quindi se un angolo misura 110°, l'altro misura: 180° – 110° = 70°.
b Due angoli complementari hanno per somma 90°, quindi se un angolo misura 85°, l'altro misura: 90° – 85° = 5°.
c Due angoli supplementari hanno per somma 180°, quindi se un angolo misura 90°, l'altro misura: 180° – 90° = 90°.
d Due angoli complementari hanno per somma 90°, quindi se un angolo misura 45°, l'altro misura: 90° – 45° = 45°.

6 **Quanto misura l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 15 cm e 36 cm?**

a 63 cm
b 39 cm
c 45 cm

Briciole di teoria

Teorema di Pitagora
In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti:

$$i=\sqrt{c_1^2+c_2^2} \Rightarrow c_1=\sqrt{i^2-c_2^2} \Rightarrow c_2=\sqrt{i^2-c_1^2}$$

Applicando il teorema di Pitagora si ha:

$$i=\sqrt{c_1^2+c_2^2} \Rightarrow i=\sqrt{15^2+36^2} \Rightarrow i=\sqrt{15^2+36^2} \Rightarrow i=\sqrt{225+1296} \Rightarrow i=\sqrt{1521}=39 \text{ cm}$$

7 **Quale numero forma una terna pitagorica con 30 e 34?**

a 18
b 50
c 16

Un terna di numeri naturali è definita pitagorica se un triangolo le cui misure dei lati sono date da tali numeri soddisfa il teorema di Pitagora, cioè è rettangolo; noi non sappiamo se i numeri dati si riferiscono alle misure dei due cateti del triangolo rettangolo oppure alla misura di un cateto e dell'ipotenusa.
Nella prima ipotesi calcoliamo:

$$i=\sqrt{30^2+34^2} \Rightarrow i=\sqrt{900+1156} \Rightarrow i=\sqrt{2056}$$

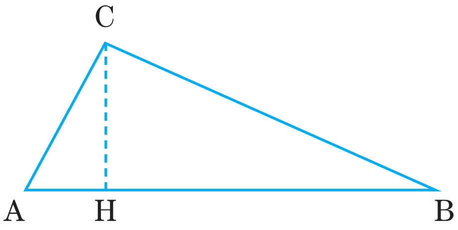
2056 non è un quadrato perfetto, quindi 30 e 34 non possono essere le misure dei cateti di un triangolo rettangolo.
Supponiamo allora che 34 sia la misura dell'ipotenusa (che è il lato maggiore del triangolo rettangolo) e 30 sia la misura di un cateto; calcoliamo il secondo cateto:

$$c=\sqrt{34^2-30^2} \Rightarrow c=\sqrt{1156-900} \Rightarrow c=\sqrt{256}=16$$

Possiamo quindi affermare che il termine mancante per formare la terna pitagorica con 30 e 34 è 16.

8 **Un triangolo rettangolo ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa lunghe 9 cm e 4 cm. L'altezza relativa all'ipotenusa:**

a misura 36 cm.
b misura 6 cm.
c non si può calcolare.



AH = 4 cm
BH = 9 cm
CH = ?

Secondo teorema di Euclide

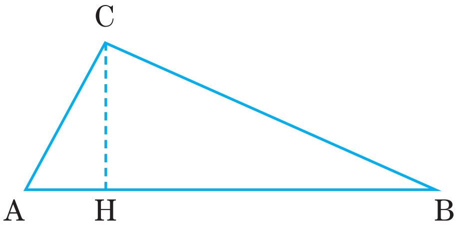
In ogni triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le due proiezioni sull'ipotenusa.

Briciole di teoria

Applicando il secondo teorema di Euclide si ottiene:
AH : CH = CH : BH
$4 : CH = CH : 9 \Rightarrow CH = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$ cm

9 **In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 18 cm e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa misura 8 cm. Il cateto a cui si riferisce la proiezione:**

a misura 9 cm.
b misura 6 cm.
c misura 12 cm.



AB = 18 cm
AH = 8 cm
AC = ?

Primo teorema di Euclide

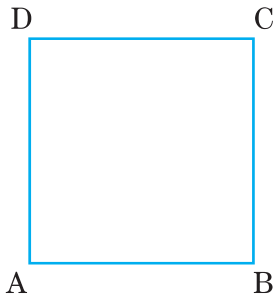
In ogni triangolo rettangolo ciascun cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa.

Briciole di teoria

Applicando il primo teorema di Euclide si ottiene:
AH : AC = AC : AB
$8 : AC = AC : 18 \Rightarrow AC = \sqrt{8 \cdot 18} = \sqrt{144} = 12$ cm

10 **Il perimetro di un quadrato è 20 cm. La sua area è:**

a $5\ cm^2$
b $25\ cm^2$
c $\frac{25}{2}\ cm^2$



$2p_{ABCD} = 20$ cm

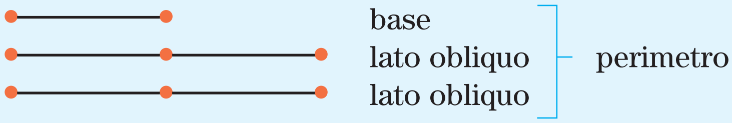
$Area_{ABCD} = ?$

Per calcolare l'area di un quadrato è necessario conoscere la misura del lato che possiamo trovare dividendo il perimetro per 4, perciò:
$l = (20 : 4) = 5$ cm $\Rightarrow$ AB = BC = CD = DA = 5 cm
$Area = l^2 \Rightarrow Area_{ABCD} = AB^2$
$(5^2) = 25\ cm^2 \Rightarrow Area_{ABCD} = 25\ cm^2$

11 **Si vuole costruire un triangolo isoscele utilizzando dei bastoncini tutti uguali in modo che il lato obliquo sia doppio della base. Quanti bastoncini occorrono?**

a 6
b 5
c In numero multiplo di 5.

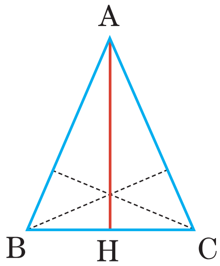
Possiamo schematizzare il problema utilizzando il metodo grafico:



Per costruire tale triangolo è necessario utilizzare un numero di bastoncini che sia multiplo di 5.

12 **Quanti assi di simmetria possiede un triangolo isoscele?**

a 3
b 1
c Nessuno



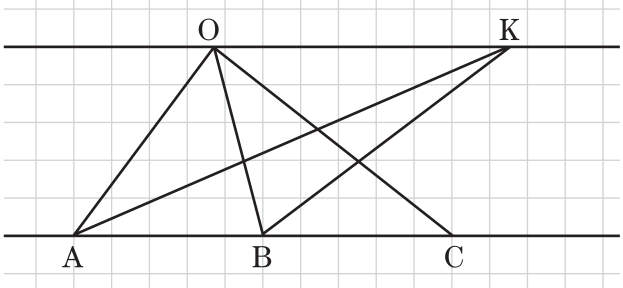
AH è l'unico asse di simmetria in quanto A è simmetrico di se stesso e B e C sono simmetrici rispetto alla retta sostegno di AH.
Ricorda che un triangolo equilatero è un particolare triangolo isoscele, ma in questo caso gli assi di simmetria sono 3.

13 **Le isometrie sono:**

a solo le simmetrie.
b le simmetrie e le rotazioni.
c le simmetrie, le rotazioni e le traslazioni.

Simmetrie, rotazioni e traslazioni sono isometrie perché mantengono inalterate forma e dimensioni delle figure che subiscono tali trasformazioni.

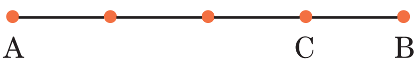
14 **Osserva la figura e indica la risposta esatta.**



I triangoli AOB, BOC e ABK hanno le basi uguali per ipotesi e le altezze uguali perché tutte pari alla distanza tra due rette parallele, perciò i triangoli dati sono equivalenti.

a Solo i triangoli AOB e BOC sono equivalenti.
b I triangoli AOB, BOC, AKB sono equivalenti.
c I triangoli AOB, BOC, AKB non sono equivalenti.

15 **Osserva la figura e indica la risposta esatta.**



a AB = 4 AC

b $AC = \frac{3}{4}\,AB$

c $BC = \frac{1}{3}\,AB$

AB risulta diviso in quattro parti uguali e AC rappresenta tre di queste parti, perciò $AC = \frac{3}{4}\,AB$.

16 **Un triangolo con due angoli ampi 45° è:**

- **a** isoscele.
- **b** rettangolo.
- **c** rettangolo isoscele.

Se il triangolo ha due angoli uguali esso è sicuramente isoscele. Inoltre se i due angoli uguali misurano 45° ciascuno, il terzo misurerà $180° - (45° + 45°) = 90°$: quindi, avendo un angolo retto, il triangolo è anche rettangolo. La risposta corretta è **c**.

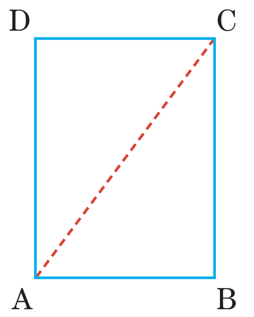
17 **In un quadrilatero tre angoli sono ampi 100°, 40° e 90°; il quarto angolo è ampio:**

- **a** 40°
- **b** 90°
- **c** 130°

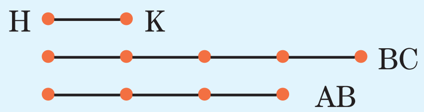
Per trovare l'ampiezza del quarto angolo bisogna ricordare che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è uguale a 360°, perciò tale ampiezza è data da $360° - (100° + 40° + 90°) = 130°$.

18 **Un rettangolo ha la base che è $\frac{3}{4}$ dell'altezza e il perimetro di 112 cm. La diagonale misura:**

- **a** 40 cm
- **b** 42 cm
- **c** 27 cm



Applichiamo il metodo grafico:



$(112 : 2) = 56 \text{ cm} \Rightarrow AB + BC$
$(56 : 7) = 8 \text{ cm} \Rightarrow HK$
$(8 \cdot 4) = 32 \text{ cm} \Rightarrow BC$
$(8 \cdot 3) = 24 \text{ cm} \Rightarrow AB$

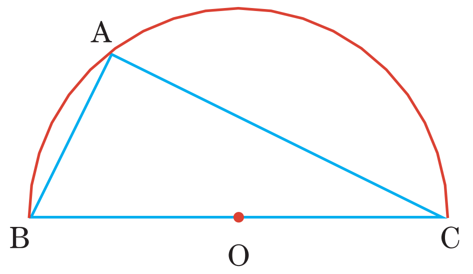
Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo ABC:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$AC = \sqrt{24^2 + 32^2} = \sqrt{576 + 1024} = \sqrt{1600} = 40 \text{ cm}$$

19 **Un triangolo è inscritto in una semicirconferenza e ha due lati lunghi 12 cm e 16 cm. Quanto misura il raggio?**

- **a** 15 cm
- **b** 20 cm
- **c** 10 cm



$AB = 12$ cm
$AC = 16$ cm

$BO = r = ?$

Il triangolo è rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza; l'ipotenusa del triangolo è il diametro della semicirconferenza, perciò applicando il teorema di Pitagora si ottiene:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$

$$BC = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$$

Se il diametro misura 20 cm, il raggio è la sua metà, perciò misura 10 cm.

20 Tutti i punti del piano cartesiano di ascissa negativa e ordinata positiva si trovano:

a nel II quadrante.
b nel III quadrante.
c nel IV quadrante.

I punti con ascissa negativa si trovano alla sinistra dell'asse delle ordinate; i punti di ordinata positiva si trovano al di sopra dell'asse delle ascisse. Nel piano cartesiano la parte in alto a sinistra corrisponde al secondo quadrante.

21 Il punto medio del segmento di estremi A(2, 9) e B(2, –3) ha coordinate:

a (4, 6)
b (2, 3)
c (2, –3)

Le formule per calcolare le coordinate del punto medio M di un segmento AB sono

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ perciò abbiamo:

$x_M = \dfrac{2+2}{2} = 2$ e $y_M = \dfrac{9-3}{2} = 3$ e quindi M(2, 3).

22 La retta di equazione $y = \dfrac{3}{5}x - 4$ è perpendicolare alla retta di equazione:

a $y = -\dfrac{3}{5}x + 1$
b $y = -\dfrac{5}{3}x + 1$
c $y = \dfrac{3}{5}x + 1$

Due rette perpendicolari hanno i coefficienti angolari che sono uno l'opposto del reciproco dell'altro; il reciproco di $\dfrac{3}{5}$ è $\dfrac{5}{3}$, il suo opposto è $-\dfrac{5}{3}$ perciò la risposta corretta è $y = -\dfrac{5}{3}x + 1$.

23 Considera la seguente tabella. A quale funzione corrisponde?

x	1	3	4
y	1	5	7

a $y = x$
b $y = 2x - 1$
c $y = x + 9$

Consideriamo la risposta $y = x$: possiamo sicuramente scartarla perché dalla tabella si vede che la variabile dipendente non è sempre uguale alla variabile indipendente; consideriamo la risposta $y = x + 9$: possiamo sicuramente scartarla perché la variabile dipendente deve essere sempre maggiore della variabile indipendente; consideriamo la risposta $y = 2x - 1$: possiamo verificare che corrisponde ai valori riportati in tabella perché per $x = 1$ abbiamo $y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, per $x = 3$ abbiamo $y = 2 \cdot 3 - 1 = 5$, per $x = 4$ abbiamo $y = 2 \cdot 4 - 1 = 7$.

24 Quale tra le seguenti funzioni rappresenta la proporzionalità diretta?

a $y = 3 - x^2$
b $y = -3x$
c $y = 3x - 3$

La risposta esatta è b in quanto rispetta la formula relativa alla proporzionalità diretta che è $y = kx$; in questo caso k vale –3.
Ricordando che due grandezze sono direttamente proporzionale se al raddoppiare, triplicare, … (dimezzare, diventare la terza parte…) di x, anche y raddoppia, triplica, … (dimezza, diventa la terza parte…), possiamo verificare che solo la risposta b è quella corretta, infatti:

$y = 3 - x^2 \Rightarrow$ per $x = 1$ si ha $y = 2$; per $x = 2$ si ha $y = -1$: al raddoppiare di x, la y non raddoppia;
$y = -3x \Rightarrow$ per $x = 1$ si ha $y = -3$; per $x = 2$ si ha $y = -6$: al raddoppiare di x, la y raddoppia;
$y = 3x - 3 \Rightarrow$ per $x = 1$ si ha $y = 0$; per $x = 2$ si ha $y = 3$: al raddoppiare di x, la y non raddoppia.

25 **La rappresentazione grafica della funzione $y = -\frac{2}{5}x - 4$ è:**

- **a** una retta che passa per l'origine.
- **b** una retta che passa per P(4, 0).
- **c** una retta che passa per P(0, –4).

Il termine noto della funzione indica che la retta interseca l'asse delle ordinate nel punto di ordinata –4, quindi la risposta corretta è **c**.

26 **Le due rette $y = 5x + 1$ e $y = -5x - 1$ sono:**

- **a** perpendicolari.
- **b** parallele.
- **c** incidenti.

I coefficienti angolari delle due rette non sono uguali ($5 \neq -5$), perciò le due rette non sono parallele; non sono uno l'opposto del reciproco dell'altro ($-5 \cdot 5 \neq -1$), perciò le rette non sono perpendicolari; le rette non possono che essere incidenti.

27 **Quale tra le due rette r: $y = 2x$ e s: $y = 3x$ forma un angolo minore con l'asse delle ordinate?**

- **a** r
- **b** s
- **c** Formano angoli uguali.

I due coefficienti angolari valgono rispettivamente 2 e 3; essendo $3 > 2$ la retta s forma con il verso positivo dell'asse delle ascisse un angolo maggiore rispetto alla retta r; poiché gli angoli formati da ciascuna retta con i due assi coordinati sono complementari, la retta s forma con l'asse delle ordinate un angolo minore rispetto alla retta r.

28 **La retta di equazione $y = -4$ è:**

- **a** parallela all'asse y.
- **b** parallela all'asse x.
- **c** bisettrice del primo e terzo quadrante.

L'equazione $y = -4$ indica che tutti i punti di tale retta hanno ordinata costante e pari a –4; una retta che mantiene costante la sua distanza dall'asse delle ascisse è ad esso parallela.

29 **La retta di equazione $x = +7$ è:**

- **a** parallela all'asse y.
- **b** parallela all'asse x.
- **c** bisettrice del primo e terzo quadrante.

L'equazione $x = +7$ indica che tutti i punti di tale retta hanno ascissa costante e pari a +7; una retta che mantiene costante la sua distanza dall'asse delle ordinate è ad esso parallela.

30 **L'equazione della bisettrice del secondo e quarto quadrante:**

- **a** $y = x$
- **b** $y = -x$
- **c** $y = 0$

L'equazione $y = x$ individua la bisettrice del primo e terzo quadrante.
L'equazione $y = 0$ individua l'asse delle ascisse.
L'equazione $y = -x$ individua la bisettrice del secondo e quarto quadrante, quindi la risposta corretta è **b**.