Algebra astratta

- Insiemi
- Relazioni e funzioni
- Operazioni binarie e strutture algebriche
- Logica

Insiemi

1 **Quali delle seguenti espressioni individuano un insieme?**

a Gli oggetti sul mio tavolo.
b Tre fiori profumati.
c Le donne che vivono a casa tua.
d Cinque ragazze belle.
e I soldati valorosi.
f Gli insegnanti bravi.
g I tuoi insegnanti.
h I numeri grandi.
i I numeri naturali maggiori di 5.
l I numeri dispari minori di 5.

Affinché un insieme sia ben definito è necessario poter stabilire con certezza se un elemento appartiene o meno all'insieme dato. Nelle frasi dell'esercizio sono insiemi quelle identificate dalle lettere **a** **c** **g** **i** **l**.

2 **Individua una proprietà caratteristica agli elementi dei seguenti insiemi.**

a A = $\{a, b, c, d\}$
b B = $\{$*lunedì*, *martedì*, *mercoledì*, *giovedì*, *venerdì*, *sabato*, *domenica*$\}$
c C = $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
d D = $\{0, 2, 4, 6\}$
e E = $\{r, o, m, a\}$
f F = $\{$*do*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*$\}$

In generale, la proprietà caratteristica non è unica. Gli insiemi dati possono ad esempio essere descritti dalle seguenti proprietà.
a Le prime quattro lettere dell'alfabeto italiano.
b I giorni della settimana.
c I primi cinque numeri naturali dispari.
d I primi quattro numeri naturali pari.
e Le lettere della parola *Roma*.
f Le sette note musicali.

3 **Rappresenta per elencazione l'insieme A = $\{x | x$ è una lettera della parola *cucchiaio*$\}$.**

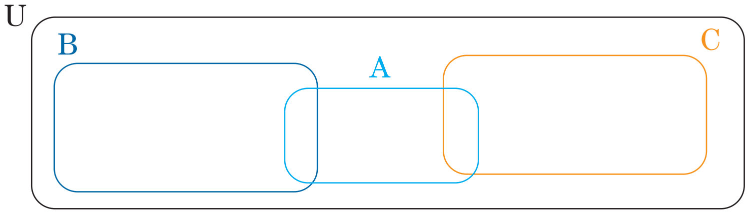
Gli elementi che appartengono all'insieme A sono le lettere, prese una sola volta, che compongono la parola data, quindi: A = $\{c, u, h, i, a, o\}$.

4 **Rappresenta per elencazione l'insieme A = $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \le x \le 5\}$.**

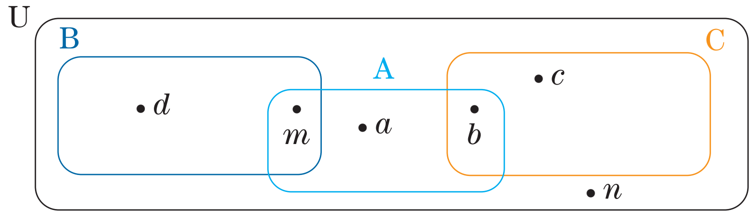
Gli elementi dell'insieme A sono i numeri naturali compresi tra 2 e 5, estremi inclusi, quindi: A = $\{2, 3, 4, 5\}$.

5 **Posiziona nel grafico gli elementi a, b, c, d, m, n dell'insieme universo U in modo che:**

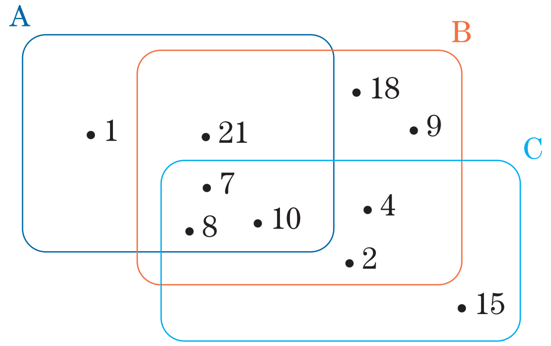
$a \in A$	$a \notin B$	$a \notin C$
$b \in A$	$b \in C$	$b \notin B$
$c \notin A$	$c \notin B$	$c \in C$
$d \in B$	$d \notin A$	$d \notin C$
$m \in A$	$m \in B$	$m \notin C$
$n \notin A$	$n \notin B$	$n \notin C$



Per posizionare gli elementi osserviamo quelli che appartengono all'intersezione degli insiemi dati:
$a \in$ solo ad A
$b \in A \cap C$, ma non a B
$c \in$ solo a C
$d \in$ solo a B
$m \in A \cap B$, ma non a C
$n \notin A$, $n \notin B$, $n \notin C$
Il grafico quindi è quello a fianco.



6 **Esamina il diagramma di Eulero-Venn in figura. Scrivi la rappresentazione tabulare degli insiemi $A \cap B \cap C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $A - B$, $B - C$.**



Briciole di teoria

- **Operazioni con gli insiemi**
- **Unione**: si indica con $A \cup B$ ed è formata da tutti gli elementi che appartengono ad A, oppure a B, oppure a entrambi (presi una sola volta).
- **Intersezione**: si indica con $A \cap B$ ed è formata da tutti gli elementi che appartengono sia ad A sia a B.
- **Differenza:** si indica con $A - B$ ed è formata dagli elementi di A che non appartengono anche a B.

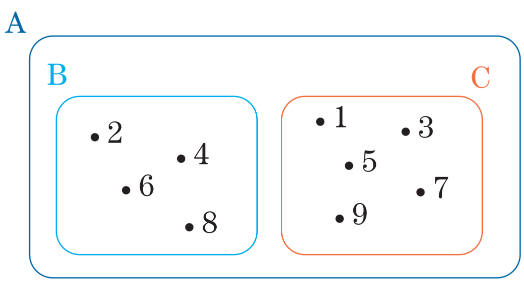
Nella rappresentazione tabulare si elencano tutti gli elementi appartenenti all'insieme.
$A \cap B \cap C = \{7, 8, 10\}$
$A \cap B = \{7, 8, 10, 21\}$
$B \cap C = \{2, 4, 7, 8, 10\}$
$A \cup B \cup C = \{1, 2, 4, 7, 8, 9, 10, 15, 18, 21\}$
$A - B = \{1\}$
$B - C = \{9, 18, 21\}$

7 **Dati gli insiemi $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ determina la rappresentazione tabulare degli insiemi $(A \cap B) \cup C$ e $(A \cup B) \cap C$.**
È esatto scrivere $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap C$?

$A \cap B = \{2, 4\}$
$(A \cap B) \cup C = \{1, 3, 5, 7, 9, 2, 4\}$
$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
$(A \cup B) \cap C = \{1, 3, 5\}$
$(A \cap B) \cup C \neq (A \cup B) \cap C$

8 **Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B = \{2, 4 , 6, 8\}$. Determina l'insieme $C = A - B$ e rappresentalo graficamente.**

$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
Rappresentando graficamente con un diagramma di Eulero-Venn otteniamo la figura a lato.



9 **Determina la rappresentazione tabulare degli insiemi $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, sapendo che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è un numero dispari $\leq 13\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leq x \leq 9\}$.**

Scriviamo gli insiemi per elencazione:
$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$
$B = \{6, 7, 8, 9\}$
$A \cap B = \{7, 9\}$
$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13\}$
$A - B = \{1, 3, 5, 11, 13\}$
$B - A = \{6, 8\}$

10 **Sono dati gli insiemi $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola *gallo*$\}$, $B = \{a, b, o, e\}$ e $C = \{x \mid x$ è una lettera della parola *pollo*$\}$; determina la rappresentazione tabulare degli insiemi $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$ e $A - (B \cap C)$.**

Scriviamo anche gli insiemi A e C per elencazione:
$A = \{g, a, l, o\}$
$B = \{a, b, o, e\}$
$C = \{p, o, l\}$
$A \cup B \cup C = \{g, a, l, o, b, e, p\}$
$A \cap B \cap C = \{o\}$
$B \cap C = \{o\}$
$A - (B \cap C) = \{g, a, l\}$

11 **Dati gli insiemi $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 5, 6, 8, 9, 10\}$ e $C = \{3, 5, 7, 11\}$, determina la rappresentazione tabulare di $(A \cap B) \cap C$ e $A \cap (B \cap C)$ e verifica che i due insiemi sono uguali.**

$A \cap B = \{5, 9\}$
$(A \cap B) \cap C = \{5\}$
$B \cap C = \{5\}$
$A \cap (B \cap C) = \{5\}$
I due insiemi sono uguali: questa è una proprietà generale dell'operazione di intersezione di insiemi.

Relazioni e funzioni

12 **Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

a V F Tra due insiemi A e B è sempre definita una relazione.
b V F Una relazione può essere rappresentata graficamente in un solo modo.
c V F Tutte le relazioni sono funzioni.
d V F Tutte le funzioni sono relazioni.
e V F Ogni relazione di A in A è riflessiva.
f V F Una relazione può essere contemporaneamente riflessiva e simmetrica.
g V F Una relazione di equivalenza gode sicuramente della proprietà transitiva.
h V F Ogni relazione d'ordine stretto è anche di ordine largo.
i V F Se $\mathcal{R}$ è una relazione definita tra A e B, la relazione inversa $\mathcal{R}^{-1}$ è definita tra B e A.
l V F Il dominio di una relazione $\mathcal{R}$ definita tra A e B è l'insieme di tutti gli elementi di A.

a F Due insiemi sono in relazione se viene assegnato un criterio che associa elementi di A con elementi di B e si scrive $a \mathcal{R} b$ dove $a \in$ A e $b \in$ B.

b F Per rappresentare graficamente una relazione abbiamo a disposizione tre diversi metodi.

Rappresentazione sagittale

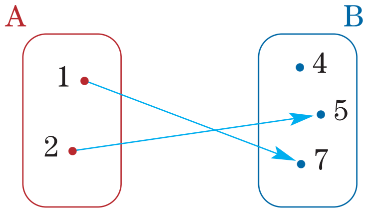
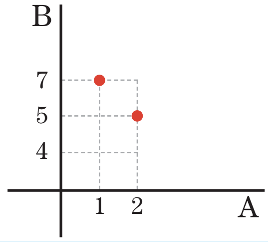


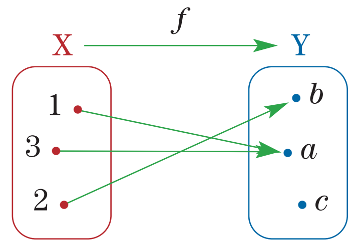
Tabella a doppia entrata

A \ B	4	5	7
1			•
2		•	

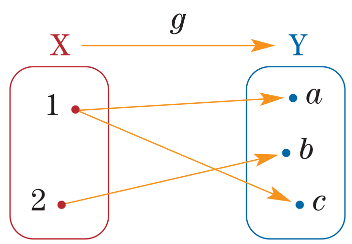
Diagramma cartesiano o reticolo



c F Una relazione tra due insiemi X e Y è una funzione f solo se a ogni elemento di X corrisponde uno e un solo elemento di Y e si scrive $y = f(x)$.



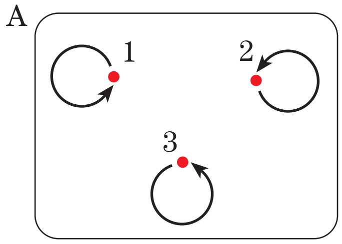
f è funzione



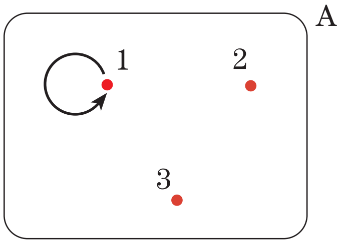
g non è funzione

d V Le funzioni sono delle particolari relazioni.

e F Una relazione $\mathcal{R}$ definita in A, non vuoto, è riflessiva se $\forall a \in$ A vale $a \mathcal{R} a$. Nella rappresentazione grafica ogni elemento ha il cappio.

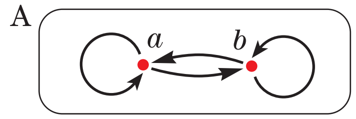


La relazione è riflessiva



La relazione non è riflessiva

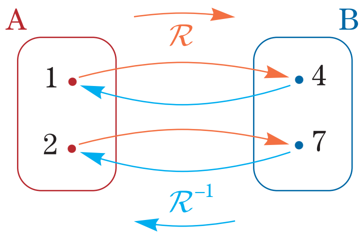
f V Una relazione definita su un insieme A è simmetrica se $\forall a \in$ A, $\forall b \in$ A si ha che se $a \mathcal{R} b$ allora $b \mathcal{R} a$. Nella rappresentazione grafica della relazione $\mathcal{R}$ se c'è la freccia in un verso c'è anche nel verso opposto.



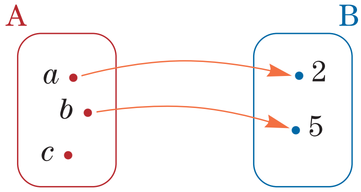
g V Una relazione $\mathcal{R}$ definita sull'insieme A non vuoto è una relazione di equivalenza se gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

h F Una relazione d'ordine stretto gode delle proprietà antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva. Una relazione di ordine largo gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Un relazione non può godere simultaneamente delle proprietà riflessiva e antiriflessiva.

i V Questa proprietà è illustrata chiaramente nella seguente figura.



l F Il dominio D di una relazione definita tra gli insiemi A e B è l'insieme degli elementi di A che hanno almeno una immagine in B.
Per la relazione in figura abbiamo ad esempio D = $\{a, b\}$.



13 **Sono dati gli insiemi A = {2, 5, 10, 15, 28} e B = {2, 3, 7} e la relazione tra A e B così definita: $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a$ è multiplo di b. Rappresentala graficamente e determina il suo dominio e codominio.**

Rappresentazione sagittale

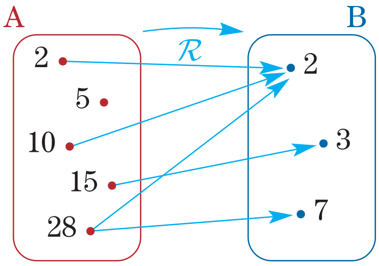
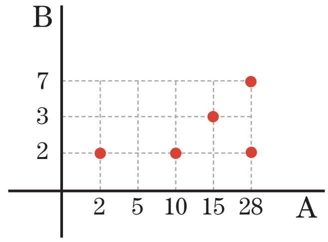


Tabella a doppia entrata

A \ B	2	3	7
2	•		
5			
10	•		
15		•	
28	•		•

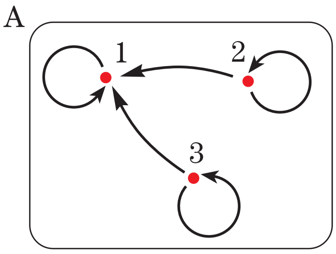
Diagramma cartesiano o reticolo



Gli elementi dell'insieme A che sono in relazione con elementi di B costituiscono il dominio D, le immagini di tali valori costituiscono il codominio C.
D = {2, 10, 15, 28}, C = {2, 3, 7}

14 **È dato l'insieme A = {1, 2, 3} e la relazione $\mathcal{R}$ così definita: $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a$ è multiplo di b. Rappresentala graficamente.**

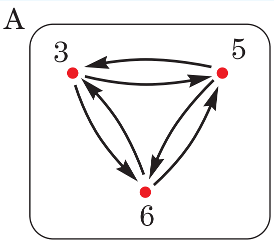
Le coppie ordinate che soddisfano la relazione sono: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 1).



Ogni elemento di A ha il cappio, la relazione è riflessiva, cioè $\forall a \in$ A vale $a\mathcal{R}a$; inoltre la relazione è antisimmetrica perché le frecce tra due elementi sono in un senso solo.

15 **È dato l'insieme A = {3, 5, 6} e la relazione $\mathcal{R}$ così definita: $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a$ diverso da b. Rappresenta graficamente la relazione.**

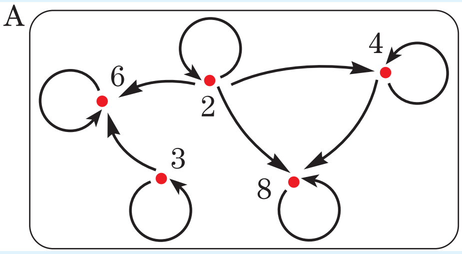
Le coppie ordinate che soddisfano la relazione sono: (3, 5), (3, 6), (5, 6), (5, 3), (6, 3), (6, 5).



Se una freccia connette due elementi in un senso, c'è anche la freccia nel senso opposto, quindi la relazione è simmetrica, cioè $\forall a, b \in$ A $a\mathcal{R}b \rightarrow b\mathcal{R}a$.
Poiché non ci sono cappi, la relazione è antiriflessiva.

16 **È dato l'insieme A = {2, 3, 4, 6, 8} e la relazione $\mathcal{R}$ così definita: $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a$ è divisore di b. Rappresenta graficamente la relazione.**

Le coppie ordinate che soddisfano la relazione sono: (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (4, 8), (6, 6), (8, 8).



Ogni elemento ha il cappio, quindi la relazione è riflessiva. Le frecce connettono due elementi solo in un verso, quindi la relazione è antisimmetrica.
La relazione $\mathcal{R}$ è soddisfatta dalle coppie (2, 4), (4, 8) e (2, 8), cioè $2\ \mathcal{R}\ 4 \wedge 4\ \mathcal{R}\ 8 \rightarrow 2\ \mathcal{R}\ 8$.

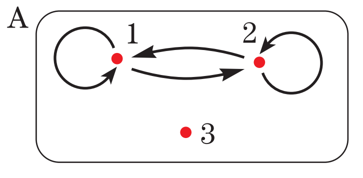
Analogo ragionamento può essere fatto con tutte le altre terne di coppie:

$2\mathcal{R}2 \wedge 2\mathcal{R}6 \rightarrow 2\mathcal{R}6$ $\quad$ $2\mathcal{R}6 \wedge 6\mathcal{R}6 \rightarrow 2\mathcal{R}6$
$2\mathcal{R}2 \wedge 2\mathcal{R}4 \rightarrow 2\mathcal{R}4$ $\quad$ $2\mathcal{R}4 \wedge 4\mathcal{R}4 \rightarrow 2\mathcal{R}4$
$2\mathcal{R}2 \wedge 2\mathcal{R}8 \rightarrow 2\mathcal{R}8$ $\quad$ $2\mathcal{R}8 \wedge 8\mathcal{R}8 \rightarrow 2\mathcal{R}8$
$3\mathcal{R}3 \wedge 3\mathcal{R}6 \rightarrow 3\mathcal{R}6$ $\quad$ $3\mathcal{R}6 \wedge 6\mathcal{R}6 \rightarrow 3\mathcal{R}6$
$3\mathcal{R}3 \wedge 3\mathcal{R}6 \rightarrow 3\mathcal{R}6$ $\quad$ $3\mathcal{R}6 \wedge 6\mathcal{R}6 \rightarrow 3\mathcal{R}6$

Quindi la relazione è transitiva, cioè $\forall a, b, c \in$ A vale $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \rightarrow a\mathcal{R}c$.

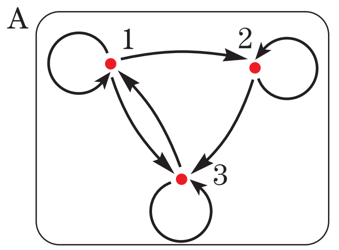
Osserva le seguenti relazioni e stabilisci di quali proprietà godono.

17



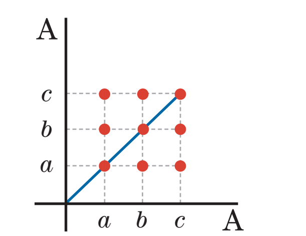
La relazione non gode della proprietà riflessiva perché l'elemento 3 non ha il cappio.
La relazione gode della proprietà simmetrica perché tra gli elementi 1 e 2 c'è la doppia freccia.
La relazione gode della proprietà transitiva perché presi gli elementi 1, 2, 1 si può scrivere $(1\mathcal{R}2 \wedge 2\mathcal{R}1) \rightarrow 1\mathcal{R}1$; analogamente per le terne 2, 1, 2 - 1, 1, 2 - 2, 2, 1 - 1, 1, 1 - 2, 2, 2.
La relazione non gode della proprietà antiriflessiva perché gli elementi 1 e 2 hanno il cappio.
La relazione non gode della proprietà antisimmetrica perché vale la simmetrica.

18



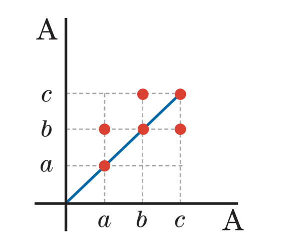
La relazione gode della proprietà riflessiva perché ogni elemento ha il cappio. Quindi non gode della proprietà antiriflessiva.
La relazione non gode della proprietà simmetrica perché gli elementi 1 e 2 non hanno la doppia freccia come pure gli elementi 3 e 2. Non gode neanche della proprietà antisimmetrica perché gli elementi 1 e 3 hanno la doppia freccia.
La relazione non gode della proprietà transitiva perché $3\mathcal{R}1 \wedge 1\mathcal{R}2$ ma non è vero che $3\mathcal{R}2$.

19



La relazione gode della proprietà riflessiva perché il reticolo contiene tutti gli elementi della diagonale principale. Quindi non è antiriflessiva.
La relazione gode della proprietà simmetrica perché ogni elemento ha il simmetrico rispetto alla diagonale principale. Quindi non è antisimmetrica.
La relazione gode della proprietà transitiva: ad esempio per gli elementi della terna a, b, a abbiamo $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \rightarrow a\mathcal{R}a$. Analoga verifica deve essere fatta per tutte le possibili terne.
Quindi $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.

20



La relazione gode della proprietà riflessiva perché il reticolo contiene tutti gli elementi della diagonale principale. Quindi non è antiriflessiva.
La relazione non gode della proprietà simmetrica perché ogni elemento dovrebbe avere il simmetrico rispetto alla diagonale principale, mentre la coppia $a\mathcal{R}b$ non ha simmetrico. Non gode neanche della proprietà antisimmetrica perché la coppia $c\mathcal{R}b$ ha la simmetrica $b\mathcal{R}c$.
La relazione non gode della proprietà transitiva perché presi gli elementi a, b, c abbiamo $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c$ ma non è vero che $a\mathcal{R}c$.

Operazioni binarie e strutture algebriche

21 **Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

a V F L'addizione è una legge di composizione interna nell'insieme dei numeri naturali.
b V F L'insieme dei numeri relativi è chiuso rispetto alla sottrazione.
c V F Una struttura abeliana è una struttura algebrica commutativa.
d V F Un semigruppo è una struttura algebrica nella quale metà dei suoi elementi godono di una medesima proprietà.
e V F Il numero 0 è l'elemento neutro di qualsiasi operazione.
f V F Un gruppo è anche un semigruppo.
g V F Qualunque insieme è una struttura algebrica.

a V Se si sommano due numeri naturali, il risultato è un numero naturale.
b V L'operazione di sottrazione tra due numeri relativi dà come risultato sempre un numero relativo.
c V In algebra il termine abeliano è sinonimo di commutativo.
d F Una struttura algebrica (A, ⊥) si dice semigruppo se la legge di composizione è associativa.
e F In una struttura algebrica (A, ⊥) si dice elemento neutro quell'elemento u tale che $\forall a \in$ A si ha $a \perp u = u \perp a = a$. In generale l'insieme A può non contenere il numero 0, che è invece l'elemento neutro dell'addizione nell'insieme dei numeri naturali.
f V Una struttura algebrica (A, ⊥) si dice gruppo se:
- ⊥ è associativa;
- esiste l'elemento neutro;
- ogni elemento di A è simmetrizzabile.

Se sono validi solo i primi due punti (A, ⊥) è un semigruppo.
g F Un insieme è dotato di struttura algebrica se in esso è definita una legge di composizione interna.

22 **Osserva la seguente tabella e stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

⊥	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

a V F $a \perp a = a$
b V F $b \perp b = b$
c V F $a \perp b = b$
d V F $b \perp c = c$
e V F $a \perp c = c$
f V F $b \perp a = a$
g V F L'operazione ⊥ non ha elemento neutro.

a V La riga e la colonna individuate da a si incontrano nell'elemento a.
b F La riga e la colonna individuate da b si incontrano nell'elemento c, quindi $b \perp b = c$.
c V La riga individuata da a e la colonna individuata da b si incontrano nell'elemento b.
d F La riga individuata da b e la colonna individuata da c si incontrano in a, quindi $b \perp c = a$.
e V La riga individuata da a e la colonna individuata da c si incontrano nell'elemento c.
f F La riga individuata da b e la colonna individuata da a si incontrano in b, quindi $b \perp a = b$.
g F L'elemento neutro è a che è il punto di incontro della riga a, b, c con la colonna a, b, c.

23 **Osserva la seguente tabella e stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

⊥	●	■	▲
●	●	▲	■
■	▲	■	●
▲	■	●	▲

a V F L'insieme considerato è A = {● , ■ , ▲}.
b V F L'operazione ⊥ non è una legge di composizione interna nell'insieme A.
c V F L'operazione ⊥ è una legge di composizione interna commutativa.

a V Gli elementi dell'insieme A sono quelli scritti nella prima linea e nella prima colonna della tabella.
b F La legge di composizione ⊥ è interna in quanto in tabella compaiono solo gli elementi dell'insieme A.
c V Perché gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono uguali.

24 **Dato l'insieme A = {1, 2, 3, 4}, completa la tabella relativa all'operazione ∗ che associa a ogni coppia di numeri la loro somma diminuita di 1; la legge ∗ è di composizione interna?**

∗	1	2	3	4
1				4
2		3		
3				
4				

Dal testo ricaviamo $a * b = a + b - 1$. Completiamo la tabella applicando la legge di composizione:

∗	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6
4	4	5	6	7

La legge ∗ non è di composizione interna perché in tabella compaiono elementi diversi dagli elementi di A.

25 **Dato l'insieme A = {1, 3, 4, 12} e l'operazione $a \perp b$ = m.c.m.(a, b), completa la seguente tabella e verifica che l'operazione è una legge di composizione interna.**

⊥	1	3	4	12
1				
3				
4				
12				

Calcoliamo il m.c.m. delle varie coppie e completiamo la tabella:

m.c.m.(1, 1) = 1
m.c.m.(1, 3) = 3
m.c.m.(1, 4) = 4
m.c.m.(1, 12) = 12

m.c.m.(3, 1) = 3
m.c.m.(3, 3) = 3
m.c.m.(3, 4) = 12
m.c.m.(3, 12) = 12

m.c.m.(4, 1) = 4
m.c.m.(4, 3) = 12
m.c.m.(4, 4) = 4
m.c.m.(4, 12) =12

m.c.m.(12, 1) = 12
m.c.m.(12, 3) = 12
m.c.m.(12, 4) = 12
m.c.m.(12, 12) = 12

⊥	1	3	4	12
1	1	3	4	12
3	3	3	12	12
4	4	12	4	12
12	12	12	12	12

La legge di composizione ⊥ è interna perché in tabella compaiono solo elementi dell'insieme A.

26 **Osserva la seguente tabella e indica se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

⊥	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

a V F L'operazione ⊥ non è una legge di composizione interna.
b V F 1 è l'elemento neutro dell'operazione ⊥.
c V F $2 \perp 4 = 4 \perp 2$
d V F 4 è il simmetrico di 3.
e V F 3 è il simmetrico di se stesso.

a F Perché nella tabella compaiono solo gli elementi 1, 2, 3, 4, cioè gli elementi dell'insieme in cui è definita la legge.
b V Perché 1 è il punto di incontro tra la linea e la colonna ordinatamente uguali alla riga e colonna principali 1, 2, 3, 4.
c V Perché $2 \perp 4 = 1$ e $4 \perp 2 = 1$.
d F Perché a e a' sono simmetrici se $a \perp a' = a' \perp a = u$, dove u è l'elemento neutro, e nel nostro caso abbiamo $4 \perp 3 = 2$, $3 \perp 4 = 2$, ma 2 non è l'elemento neutro.
e V Perché $3 \perp 3 = 1$, e come abbiamo visto 1 è l'elemento neutro.

27 **Dato l'insieme A = {a, b, c} e la tabella che definisce l'operazione ⊥, studia la legge di composizione.**

$\perp$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	c

La legge di composizione è interna perché in tabella compaiono solo elementi dell'insieme A.
La legge di composizione è commutativa perché gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono uguali.

L'elemento neutro è b perché la linea e la colonna ordinatamente uguali alla linea e alla colonna principali si incontrano in b.
Una legge di composizione è associativa se $\forall x, y, z \in$ A si ha $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$; osserviamo in tabella le operazioni di composizione e verifichiamo con tutte le terne possibili l'associatività della legge di composizione ⊥.

$(a \perp a) \perp a = a \perp (a \perp a)$
$a \perp a = a \perp a$
$a = a$

$(b \perp b) \perp b = b \perp (b \perp b)$
$b \perp b = b \perp b$
$b = b$

$(c \perp c) \perp c = c \perp (c \perp c)$
$c \perp c = c \perp c$
$c = c$

$(a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$
$a \perp c = a \perp c$
$a = a$

$(a \perp c) \perp b = a \perp (c \perp b)$
$a \perp b = a \perp c$
$a = a$

$(b \perp a) \perp c = b \perp (a \perp c)$
$a \perp c = b \perp a$
$a = a$

$(b \perp c) \perp a = b \perp (c \perp a)$
$c \perp a = b \perp a$
$a = a$

$(c \perp a) \perp b = c \perp (a \perp b)$
$a \perp b = c \perp a$
$a = a$

$(c \perp b) \perp a = c \perp (b \perp a)$
$c \perp a = c \perp a$
$a = a$

Procedendo in modo analogo sulle restanti terne, si verifica che la legge di composizione è associativa.
Non tutti gli elementi sono simmetrizzabili: ad esempio a non ammette un simmetrico, poiché $\forall x$ si ha $a \perp x = a$.
La struttura (A, ⊥) ha una legge di composizione interna associativa, quindi è un semigruppo; ha anche l'elemento neutro, quindi è un monoide; la legge ⊥ è commutativa, quindi (A, ⊥) è un monoide abeliano. Poiché non tutti gli elementi sono simmetrizzabili, la struttura non è un gruppo.

28 **Osserva le seguenti tabelle e rispondi alle domande.**

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	c	b
c	c	b	a

▲	a	b	c
a	a	b	e
b	c	b	a
c	c	b	d

a Le due operazioni sono entrambe leggi di composizione interna?
b L'insieme A = {a, b, c} e le operazioni $*$ e ▲ formano in entrambi i casi una struttura algebrica?

a No, la legge di composizione $*$ è interna perché in tabella compaiono solo gli elementi della linea e della colonna principali. La legge di composizione ▲ non è interna perché in tabella compaiono gli elementi d ed e che non appartengono all'insieme di partenza A = $\{a, b, c\}$.

b No: nel primo caso (A, $*$) è una struttura algebrica perché la legge di composizione è interna, nel secondo caso (A, ▲) non è una struttura algebrica perché la legge di composizione non è interna.

29 **Dati l'insieme A = {1, 2, 9, 18} e l'operazione $a * b$ = M.C.D.(a, b), completa la seguente tabella e determina se la struttura (A, $*$) è un monoide abeliano.**

$*$	1	2	9	18
1				
2				
9				
18				

Calcoliamo il M.C.D. delle varie coppie e completiamo la tabella:

M.C.D.(1, 1) = 1
M.C.D.(1, 2) = 1
M.C.D.(1, 9) = 1
M.C.D.(1, 18) = 1

M.C.D.(2, 1) = 1
M.C.D.(2, 2) = 2
M.C.D.(2, 9) = 1
M.C.D.(2, 18) = 2

M.C.D.(9, 1) = 1
M.C.D.(9, 2) = 1
M.C.D.(9, 9) = 9
M.C.D.(9, 18) = 9

M.C.D.(18, 1) = 1
M.C.D.(18, 2) = 2
M.C.D.(18, 9) = 9
M.C.D.(18, 18) = 18

$*$	1	2	9	18
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
9	1	1	9	9
18	1	2	9	18

La legge di composizione $*$ è interna perché in tabella compaiono solo elementi dell'insieme A.
La legge $*$ è associativa, cioè $\forall a, b, c \in$ A vale l'uguaglianza $(a * b) * c = a * (b * c)$.
Osserviamo in tabella le operazioni di composizione e verifichiamo per alcune terne possibili l'associatività della legge di composizione $*$:

$(2 * 9) * 1 = 2 * (9 * 1)$
$1 * 1 = 2 * 1$
$1 = 1$

$(18 * 1) * 2 = 18 * (1 * 2)$
$1 * 2 = 18 * 1$
$1 = 1$

$(9 * 18) * 1 = 9 * (18 * 1)$
$9 * 1 = 9 * 1$
$1 = 1$

La legge è commutativa perché gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono uguali.
La colonna 1, 2, 9, 18 e la linea 1, 2, 9, 18 si incontrano in 18 che quindi è l'elemento neutro.
La struttura è un monoide abeliano.

30 **Dati l'insieme A = {a, b, c, d} e la legge di composizione ✶ rappresentata in tabella, determina se la struttura (A, ✶) è un gruppo abeliano.**

✶	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	b	a
d	d	c	a	b

La legge di composizione ✶ è interna perché in tabella compaiono solo elementi di A, quindi (A, ✶) è una struttura algebrica.
La legge ✶ è associativa se $\forall x, y, z \in$ A vale l'uguaglianza $(x \ast y) \ast z = x \ast (y \ast z)$.
Osserviamo in tabella le operazioni di composizione e verifichiamo per alcune terne possibili l'associatività della legge di composizione ✶:

$(a \ast b) \ast c = a \ast (b \ast c)$ $\quad$ $(b \ast c) \ast d = b \ast (c \ast d)$ $\quad$ $(d \ast a) \ast c = d \ast (a \ast c)$

$b \ast c = a \ast d$ $\quad$ $d \ast d = b \ast a$ $\quad$ $d \ast c = d \ast c$

$d = d$ $\quad$ $b = b$ $\quad$ $a = a$

La legge è commutativa perché gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono uguali.
La linea a, b, c, d e la colonna a, b, c, d si incontrano in a, che quindi è l'elemento neutro.
Ogni elemento è simmetrizzabile perché nella riga e nella colonna di ogni elemento considerato l'elemento neutro a compare una sola volta e nella stessa posizione: in particolare a e b sono simmetrici di se stessi, mentre c e d sono simmetrici tra loro.
La struttura (A, $\ast$) è quindi gruppo abeliano.

Logica

31 **Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

a V F I segni di operazione tra proposizioni sono i connettivi logici.
b V F Il risultato di ogni operazione logica ha un valore di verità.
c V F Una tavola di verità è una tabella in cui si riporta soltanto il valore Vero.
d V F Qualunque frase è una proposizione.
e V F Nella logica matematica una frase senza senso può essere una proposizione.

a V I connettivi logici uniscono due o più proposizioni, semplici o composte, e danno come risultato una proposizione composta.
b V Ogni proposizione logica semplice o composta ha un valore di verità, cioè è vera oppure falsa.
c F Una tavola di verità riporta i valori Vero o Falso della proposizione considerata.
d F Una frase è una proposizione solo se è possibile dire se è vera o falsa.
e V Una frase è una proposizione se è possibile dire se è vera o falsa indipendentemente dal fatto che linguisticamente abbia o meno un senso.

32 **Tra le seguenti affermazioni stabilisci quali sono delle proposizioni logiche.**

a La Terra è un pianeta del sistema solare.
b La Luna è un satellite di Giove.
c La matematica è una disciplina interessante.
d Il Sole è molto grande.
e La parola *matematica* è composta da dodici lettere.

Le frasi di cui si può affermare con certezza la verità o meno, e che quindi sono delle proposizioni logiche, sono quelle contrassegnate dalle lettere a, b, e: la prima è vera, le altre due sono false. La frase c non è una proposizione logica perché la matematica può essere interessante per qualcuno e noiosa per qualcun altro. La frase d non è né vera né falsa perchè il Sole è molto grande rispetto a un uomo, ma piccolo rispetto all'universo.

33 **Per ogni coppia di proposizioni scrivi la proposizione composta utilizzando il connettivo o (disgiunzione inclusiva) e poi il connettivo e (congiunzione). Stabilisci poi il valore di verità delle due proposizioni composte.**

a p: +3 è un numero negativo. $\quad$ q: +3 è la somma di +4 e –1.
b p: il rettangolo ha tutti i lati congruenti. $\quad$ q: il rettangolo ha tutti gli angoli congruenti.
c p: il triangolo equilatero è un poligono regolare. $\quad$ q: il triangolo equilatero è isoscele.
d p: il cilindro è un solido di rotazione. $\quad$ q: il cilindro è un poliedro.
e p: Leopardi era un poeta. $\quad$ q: Leopardi ha scritto l'Infinito.

a $p \vee q$: +3 è un numero negativo o è la somma di +4 e –1.
$p \wedge q$: +3 è un numero negativo e è la somma di +4 e –1.
$p = F$ $\quad$ $q = V$
$p \vee q = V$ $\quad$ $p \wedge q = F$

b $p \vee q$: il rettangolo ha tutti i lati congruenti o ha tutti gli angoli congruenti.
$p \wedge q$: il rettangolo ha tutti i lati congruenti e ha tutti gli angoli congruenti.
$p = F$ $\quad$ $q = V$
$p \vee q = V$ $\quad$ $p \wedge q = F$

c $p \vee q$: il triangolo equilatero è un poligono regolare o è isoscele.
$p \wedge q$: il triangolo equilatero è un poligono regolare e è isoscele.
$p = V$ $\quad$ $q = V$
$p \vee q = V$ $\quad$ $p \wedge q = V$

d $p \vee q$: il cilindro è un solido di rotazione o è un poliedro.
$p \wedge q$: il cilindro è un solido di rotazione e è un poliedro.
$p = V$ $\quad$ $q = F$
$p \vee q = V$ $\quad$ $p \wedge q = F$

e $p \vee q$: Leopardi era un poeta o ha scritto l'Infinito.
$p \wedge q$: Leopardi era un poeta e ha scritto l'Infinito.
$p = V$ $\quad$ $q = V$
$p \vee q = V$ $\quad$ $p \wedge q = V$

Briciole di teoria

Le tavole di verità dei connettivi $\wedge$ e $\vee$ sono:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

34 **Completa le seguenti tavole di verità.**

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
		F	F
	V	F	
	F		V
V		V	V

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
F			V
	F		F
	V	V	
V	F		

Ricordando le tavole di verità dei connettivi $\wedge$ e $\vee$, possiamo completare in un unico modo le tabelle date che diventano:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
F	F	F	F
F	V	F	V
V	F	F	V
V	V	V	V

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
F	V	F	V
F	F	F	F
V	V	V	V
V	F	F	V

35 **Date le proposizioni semplici p: "il triangolo isoscele ha due lati congruenti", q: "il triangolo isoscele è sempre acutangolo" ed r: "la somma degli angoli interni di un triangolo isoscele è sempre 180°", stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni composte.**

a $(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{r})$ $\qquad$ **b** $\overline{p \vee (q \vee r)} \wedge p$ $\qquad$ **c** $p \vee (\bar{q} \vee r)$

a

p	q	r	$p \vee q$	$\bar{r}$	$p \vee \bar{r}$	$(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{r})$
V	F	V	V	F	V	V

b

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$\overline{p \vee (q \vee r)}$	$\overline{p \vee (q \vee r)} \wedge p$
V	F	V	V	V	F	F

c

p	q	r	$\bar{q}$	$\bar{q} \vee r$	$p \vee (\bar{q} \vee r)$
V	F	V	V	V	V

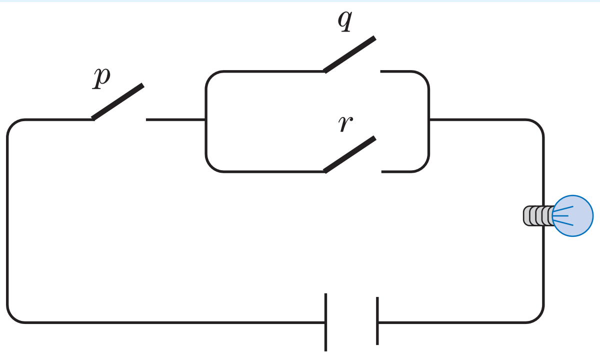
36 **Disegna per ogni proposizione composta un circuito che la rappresenti.**

a $p \wedge (q \vee r)$
b $(p \vee q) \wedge r$
c $p \vee q \vee r$

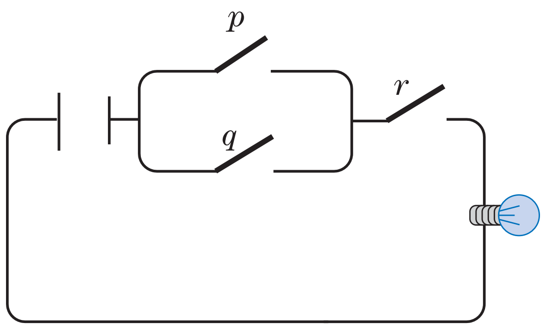
Briciole di teoria

La proposizione $p \vee q$ si rappresenta con due interruttori in parallelo, mentre la proposizione $p \wedge q$ si rappresenta con due interruttori in serie

a La proposizione composta $p \wedge (q \vee r)$ si rappresenta mettendo l'interruttore p in serie con i due interruttori q e r messi in parallelo.



b La proposizione composta $(p \vee q) \wedge r$ si rappresenta mettendo l'interruttore r in serie con gli interruttori p e q messi in parallelo.



c La proposizione composta $p \vee q \vee r$ si rappresenta mettendo in parallelo i tre interruttori p, q, r.