Geometria solida

SEZ. R

- Rette e piani nello spazio
- I poliedri
- I solidi di rotazione

Rette e piani nello spazio

1 **Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

a V F Se tre rette nello spazio sono tra loro parallele, allora sono necessariamente complanari.

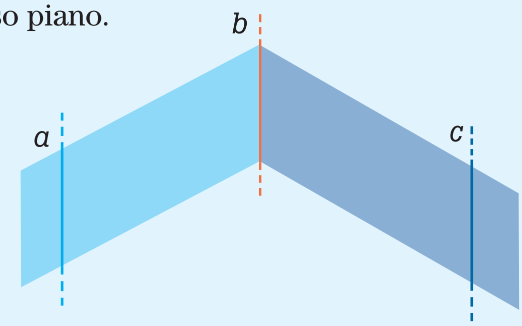
b V F Se a, b, c sono tre rette distinte tali che $a \perp b$ e $b \perp c$, allora può essere $a \perp c$.

c V F Se due piani hanno in comune due punti A e B, hanno in comune tutta la retta contenente i punti.

d V F La distanza di un punto P da un piano α è il minore dei segmenti che congiungono P con un punto di α.

e V F Se una retta r interseca un piano α in un punto P, tutti gli angoli formati dalla retta r con le rette di α passanti per P sono tra loro congruenti.

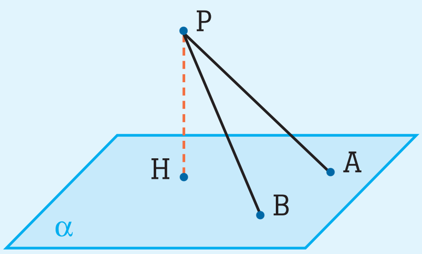
a F Perché le rette a, b, c potrebbero essere a due a due complanari, ma non tutte e tre appartenenti allo stesso piano.



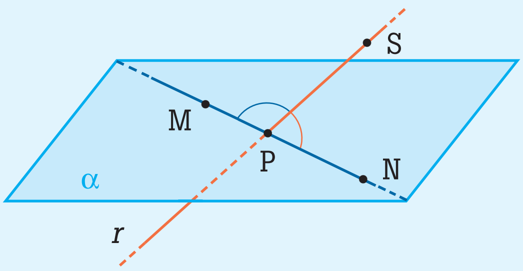
b V Le rette b e c sono complanari e si intersecano in un punto P. La retta a passante per P e perpendicolare al piano è perpendicolare a ogni retta del piano, quindi $a \perp b$ e $a \perp c$.

c V Uno dei postulati dello spazio afferma che dati su un piano due punti, la retta passante per essi giace completamente sul piano; quindi se i punti A e B appartengono a due piani, la retta passante per A e B è in comune a entrambi.

d V Il termine distanza è sinonimo di perpendicolarità (come nella geometria piana).



e F La retta r è generica, quindi non è detto che sia perpendicolare al piano α, perciò le rette passanti per P formano angoli diversi con la retta r.



$S\hat{P}M \neq S\hat{P}N$

f V F Se r è una retta, α e β sono due piani distinti e $r \parallel \alpha$, $r \parallel \beta$, allora i piani α e β sono tra loro paralleli.

g V F Tutte le rette passanti per il piede H della retta r perpendicolare a un piano α sono perpendicolari alla retta r.

h V F Nello spazio una retta r e un punto P a essa esterno individuano infiniti piani.

i V F Un angolo diedro è una parte di spazio.

l V F Se due piani si intersecano, formano quattro angoli diedri.

m V F La sezione normale di un diedro è l'intersezione tra il diedro e un piano qualsiasi.

n V F Le facce di un diedro sono due semipiani.

o V F L'ampiezza di un diedro coincide con l'ampiezza della sua sezione normale.

p V F La somma di tutte le facce di un angoloide convesso è sempre minore o uguale a 360°.

q V F I diedri hanno la stessa nomenclatura degli angoli della geometria piana.

r V F Diedri congruenti possono avere sezioni normali disuguali.

f F Basti pensare a una qualunque retta parallela allo spigolo di un diedro: essa soddisfa le ipotesi, ma i piani sono palesemente incidenti e non paralleli.

g V Per il punto H passano infinite rette appartenenti al piano α; per definizione una retta perpendicolare a un piano è perpendicolare a ogni retta del piano passante per l'intersezione H.

h F Perché per tre punti non allineati passa un solo piano, quindi se il punto P non appartiene alla retta r, non è allineato con due punti qualsiasi della retta r.

i V Il diedro è ciascuna delle due parti di spazio individuate da due semipiani aventi l'origine in comune.

l V Un diedro è la parte di spazio compresa tra due semipiani aventi la stessa origine, e, analogamente alla geometria piana dove due rette incidenti individuano quattro angoli a due a due congruenti (angoli opposti al vertice), così nello spazio due piani incidenti individuano quattro diedri a due a due congruenti (diedri opposti allo spigolo).

m F Per definizione, la sezione normale di un diedro è l'angolo ottenuto dall'intersezione del diedro con un piano perpendicolare al suo spigolo.

n V Un diedro è una delle due parti in cui due semipiani, detti facce e aventi la stessa origine, dividono lo spazio.

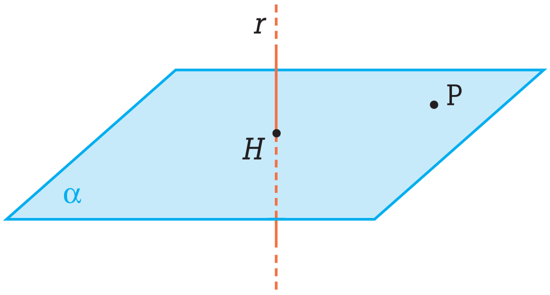
o V Per definizione, l'ampiezza di un diedro è l'ampiezza della sua sezione normale, quindi, analogamente alla geometria piana, si può avere un diedro nullo, acuto, retto, ottuso, piatto e giro.

p V Tagliando infatti la superficie di un angoloide lungo uno spigolo e schiacciandolo su un piano si ottiene un angolo minore di un angolo giro. Se la somma è uguale a 360° l'angoloide si appiattisce e si dice degenere.

q V Infatti gli angoli diedri vengono classificati mediante la loro sezione normale, che è un comune angolo del piano. Si parla quindi di diedri nulli, acuti, retti, ottusi, piatti e giro e di coppie di diedri consecutivi, adiacenti, opposti allo spigolo, complementari, supplementari, esplementari.

r F La sezione normale di un diedro è l'angolo ottenuto dall'intersezione tra un diedro e un piano perpendicolare al suo spigolo: si può dimostrare che diedri congruenti hanno la stessa sezione normale.

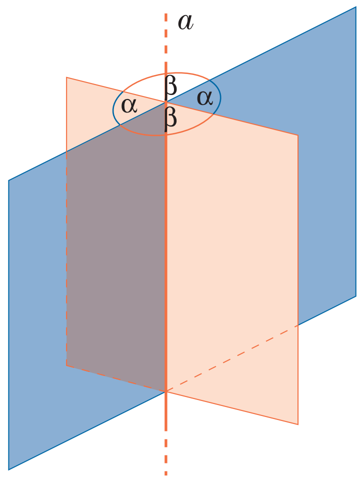
2 **In figura sono rappresentati un piano α e una retta *r* a esso perpendicolare nel punto H. P è un generico punto di α. Rispondi alle domande.**



a Come sono tra loro le rette PH e *r*? Perché?
b Come sono tra loro una generica retta di α non passante per H e la retta *r*? Perché?

a Consideriamo la retta passante per P e per H, che è unica perché per due punti passa una sola retta. Poiché *r* è perpendicolare al piano nel punto H, per definizione essa è perpendicolare a ogni retta del piano passante per H, quindi PH e *r* sono tra loro perpendicolari.
b Una generica retta del piano α non passante per H e la retta *r* sono tra loro sghembe.

3 **Quanti diedri formano due piani che si intersecano? Se l'ampiezza della sezione normale di uno dei diedri è ampia 85°, qual è l'ampiezza degli altri?**



$\alpha = 85°$
$\beta = ?$

Due piani incidenti formano quattro diedri a due a due congruenti.

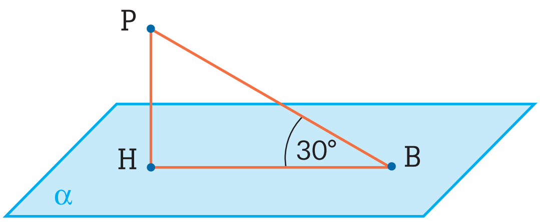
$\alpha = 85°$

$2\alpha + 2\beta = 360°$

$$\frac{360° - 2 \cdot 85°}{2} = 95° \quad \Rightarrow \beta$$

Risolvi i seguenti problemi.

4 H è la proiezione di un punto P sul piano α e B appartiene ad α; sai inoltre che $H\hat{B}P = 30°$ e BP = 10 cm. Calcola la distanza di P dal piano α.

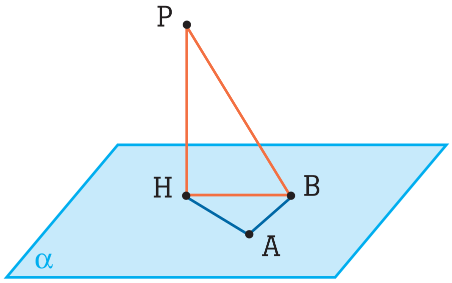


$PH \perp \alpha$
$H\hat{B}P = 30°$
$BP = 10$ cm
$PH = ?$

Il triangolo PHB è rettangolo perché H è la proiezione del punto P sul piano α.
In un triangolo rettangolo con gli angoli acuti ampi 30° e 60°, il cateto minore, opposto all'angolo ampio 30°, è la metà dell'ipotenusa.

$$PH = \frac{1}{2}PB = 10\text{ cm} \cdot \frac{1}{2} = 5\text{ cm}$$

5 Il segmento PH è perpendicolare al piano α ed è lungo 36 cm. I punti $A \in \alpha$ e $B \in \alpha$ sono tali che $H\hat{A}B = 90°$, AH = 12 cm e AB = 9 cm. Calcola la lunghezza di PB.



$PH \perp \alpha$ PH = 36 cm
$H\hat{A}B = 90°$ AH = 12 cm
AB = 9 cm PB = ?

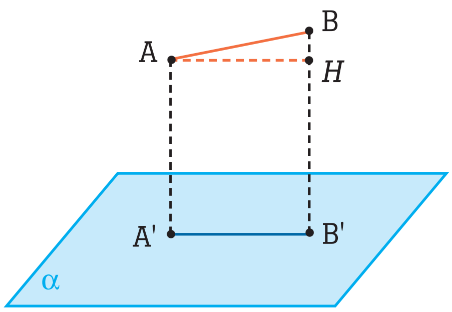
Il triangolo AHB è rettangolo in A per ipotesi, quindi applichiamo il teorema di Pitagora:

$$HB = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \sqrt{12^2 + 9^2}\ \text{cm} = \sqrt{225}\ \text{cm} = 15\ \text{cm}$$

Il triangolo PHB è rettangolo in H perché PH è perpendicolare al piano, quindi è perpendicolare a ogni retta passante per il piede H:

$$PB = \sqrt{PH^2 + HB^2} = \sqrt{36^2 + 15^2}\ \text{cm} = \sqrt{1521}\ \text{cm} = 39\ \text{cm}$$

6 A'B' è la proiezione di AB sul piano α. Sai inoltre che AB = 17 cm, AA' = 20 cm e BB' = 28 cm. Calcola la lunghezza di A'B'.



$AA' \perp \alpha$ $BB' \perp \alpha$
AB = 17 cm AA' = 20 cm
BB' = 28 cm A'B' = ?

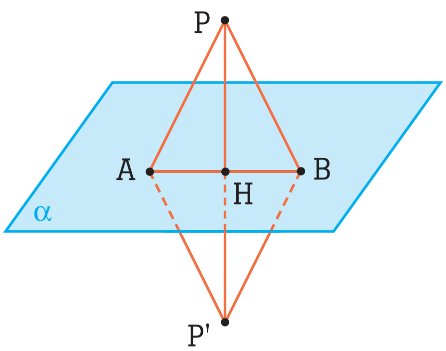
Dal punto A tracciamo la perpendicolare al segmento BB' e determiniamo il punto H. Il triangolo ABH è rettangolo in H per costruzione; possiamo applicare il teorema di Pitagora per ricavare AH:

$$BH = BB' - AA' = 28\ \text{cm} - 20\ \text{cm} = 8\ \text{cm}$$

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{17^2 - 8^2}\ \text{cm} = \sqrt{225}\ \text{cm} = 15\ \text{cm}$$

Il segmento A'B' è congruente al segmento AH perché uguali alla distanza tra due rette parallele AA' e BB'.

7 P e P' sono punti simmetrici rispetto al piano α, che interseca il segmento PP' in H; il segmento AB giace sul piano α e H è il suo punto medio. Sapendo che PH = 15 cm e che l'area del quadrilatero AP'BP è 240 cm^2, calcola la lunghezza di AB.



PH = HP' = 15 cm
$PH \perp \alpha$
AH = HB
$S_{AP'BP} = 240\ \text{cm}^2$
AB = ?

$PH = P'H = 15\ \text{cm} \Rightarrow PP' = 30\ \text{cm}$
Il quadrilatero AP'BP, avendo le diagonali perpendicolari, è un rombo di area 240 cm^2, dove AB è una diagonale.

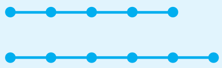
$$A_{rombo} = \frac{PP' \cdot AB}{2}$$

$$AB = \frac{A_{rombo} \cdot 2}{PP'} = \frac{240 \cdot 2}{30}\ \text{cm} = 16\ \text{cm}$$

8 Due diedri α e β sono adiacenti e la sezione normale di uno di essi è $\frac{4}{5}$ della sezione normale dell'altro. Quanto è ampio ciascun diedro?

Due diedri α e β adiacenti formano un diedro piatto.

$\alpha + \beta = 180°$ $\qquad \alpha = \frac{4}{5}\beta$



$\Rightarrow \alpha$

$\Rightarrow \beta$

Il diedro piatto è formato da 4 + 5 = 9 parti uguali:

$\frac{180°}{9} = 20°$ $\qquad \Rightarrow$ ampiezza di una parte

$20° \cdot 4 = 80°$ $\qquad \Rightarrow \alpha$

$20° \cdot 5 = 100°$ $\qquad \Rightarrow \beta$

9 Due diedri α e β sono adiacenti e il doppio del minore supera di 27° il maggiore. Quanto è ampio il maggiore?

Supponiamo $\alpha < \beta$; abbiamo:

$2\alpha = \beta + 27° \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 2\alpha - 27°$

Sostituiamo l'espressione per β nella condizione $\alpha + \beta = 180°$:

$\alpha + 2\alpha - 27° = 180° \quad \Rightarrow \quad 3\alpha = 207° \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{207°}{3} = 69°$

$\beta = 2\alpha - 27° = 2 \cdot 69° - 27° = 111°$

I poliedri

10 **Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

a V F Tutti i solidi sono poliedri.

b V F Un prisma è detto regolare se il poligono di base è un poligono regolare.

c V F In un prisma retto le facce laterali sono rettangoli.

d V F Le basi di un prisma sono congruenti e poste su piani paralleli.

e V F Il parallelepipedo rettangolo è un prisma regolare.

f V F Il cubo è un prisma regolare.

a F Le figure solide possono essere poliedri, ma anche corpi rotondi.

b F Per essere regolare un prisma deve essere retto e avere per base un poligono regolare.

c V Se il prisma è retto, l'altezza, perpendicolare al piano di base, coincide con uno spigolo laterale e le facce laterali sono rettangoli; se il prisma non è retto le facce laterali sono generici parallelogrammi.

d V Per definizione le basi di un prisma sono poligoni congruenti e posti su piani paralleli. Per avere un prisma bisogna comunque richiedere anche che le facce laterali siano tutte dei parallelogrammi.

e F Un parallelepipedo rettangolo è un prisma retto che ha per base un rettangolo, quindi è regolare solo nel caso particolare in cui questo sia anche un quadrato.

f V Il cubo infatti è un prisma retto e le sue basi sono due quadrati, quindi dei poligoni regolari.

11 **Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

a V F Due solidi sono equivalenti se hanno la stessa superficie totale.

b V F Due solidi fatti dello stesso materiale e aventi lo stesso peso sono equivalenti.

a F Due solidi sono equivalenti se hanno lo stesso volume.

b V Il peso di un corpo è uguale al prodotto del volume per il peso specifico:

$$P = V \cdot p_s \quad \Rightarrow \quad V = \frac{P}{p_s}$$

Poiché i solidi hanno lo stesso peso e sono costituiti dello stesso materiale, e quindi con peso specifico uguale, hanno anche i volumi uguali e perciò sono equivalenti.

12 **Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

a V F In una piramide non retta l'altezza cade sempre fuori dal poligono di base.

b V F In una piramide retta tutte le facce laterali sono triangoli isosceli.

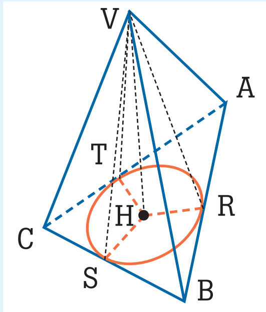
c V F In una piramide retta tutte le facce laterali hanno la medesima altezza rispetto al lato di base.

d V F Una piramide che ha per base un rettangolo generico non può essere retta.

a F L'altezza di una piramide non retta, purché non cada nel centro della circonferenza inscritta nel poligono di base, può cadere in un punto qualsiasi interno o esterno al poligono di base.

b F Le facce laterali di una piramide sono triangoli isosceli congruenti solo se il poligono di base è regolare.

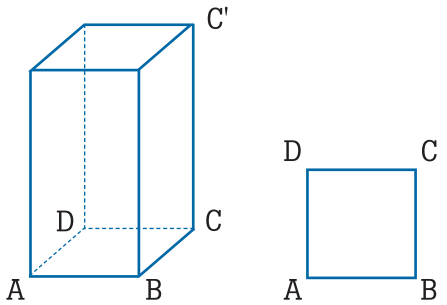
c V Se la piramide è retta il poligono di base è circoscrivibile a una circonferenza e gli apotemi di base sono tutti uguali perché raggi del cerchio inscritto. Considerando ad esempio la piramide in figura, i triangoli VHR, VHS, VHT sono tutti rettangoli in H e hanno i cateti rispettivamente uguali, quindi anche le ipotenuse di tali triangoli VR, VT, VS sono uguali.



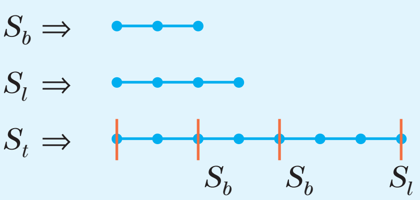
d V Il rettangolo generico non è circoscrivibile a una circonferenza, la piramide non può perciò essere retta.

Risolvi i seguenti problemi.

13 Il rapporto fra la superficie di una base e la superficie laterale di un prisma regolare quadrangolare è $\frac{2}{3}$ e la superficie totale è 18 144 dm². Calcola la lunghezza dell'altezza del prisma.



$$\frac{S_b}{S_l} = \frac{2}{3} \qquad S_t = 18\,144\ \text{dm}^2 \qquad CC' = ?$$



$$\frac{18\,144}{7}\ \text{dm}^2 = 2592\ \text{dm}^2 \quad \Rightarrow$$

$$2592\ \text{dm}^2 \cdot 2 = 5184\ \text{dm}^2 \quad \Rightarrow \quad S_b$$

$$S_l = S_t - 2S_b = 18144\ \text{dm}^2 - 2 \cdot 5184\ \text{dm}^2 = 7776\ \text{dm}^2$$

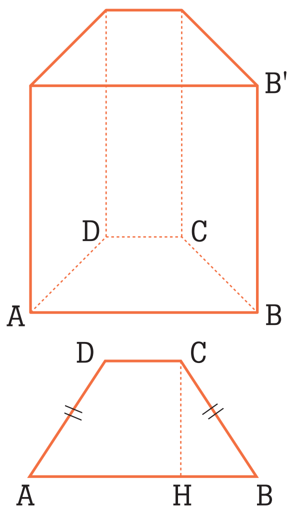
Il prisma è quadrangolare regolare, quindi la base è un quadrato:

$AB = \sqrt{S_b} = \sqrt{5184}\ dm = 72\ dm$

$2p = 4 \cdot 72\ dm = 288\ dm$

$DC = \dfrac{S_l}{2p} = \dfrac{7776}{288}\ dm = 27\ dm$

14 La base di un prisma retto è un trapezio isoscele avente il perimetro lungo 78 cm e la base minore uguale al lato obliquo e lunga 15 cm; sapendo che il prisma è alto 23 cm, calcola la sua superficie totale.



$2p_{ABCD} = 78\ cm$
$AD = DC = CB = 15\ cm$
$BB' = 23\ cm$ $\qquad S_t = ?$

Calcoliamo la lunghezza della base maggiore del trapezio:

$AB = 2p - DC - CB - AD = (78 - 15 - 15 - 15)\ cm = 33\ cm$

$HB = \dfrac{AB - DC}{2} = \dfrac{33 - 15}{2}\ cm = 9\ cm$

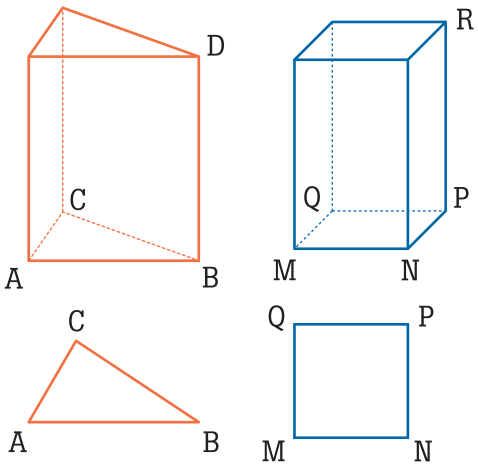
$CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{15^2 - 9^2}\ cm = \sqrt{144}\ cm = 12\ cm$

$A_{ABCD} = \dfrac{(AB + CD) \cdot CH}{2} = \dfrac{(33 + 15) \cdot 12}{2}\ cm^2 = 288\ cm^2$

$S_l = 2p \cdot BB' = (78 \cdot 23)\ cm^2 = 1794\ cm^2$

$S_t = S_l + 2S_b = (1794 + 2 \cdot 288)\ cm^2 = 2370\ cm^2$

15 Le superfici laterali di due prismi retti sono equivalenti. Uno dei prismi ha per base un triangolo rettangolo con l'ipotenusa lunga 45 cm e un cateto lungo 27 cm, ed è alto 14 cm; l'altro prisma ha per base un quadrato con il lato lungo 9 cm. Calcola l'altezza del secondo prisma.



$AB = 45\ cm \quad AC = 27\ cm$
$DB = 14\ cm \quad MN = 9\ cm$
$PR = ?$

Calcoliamo la lunghezza del cateto BC applicando il teorema di Pitagora:

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{45^2 - 27^2}\ cm = \sqrt{1296}\ cm = 36\ cm$

$2p_{ABC} = (27 + 45 + 36)\ cm = 108\ cm$

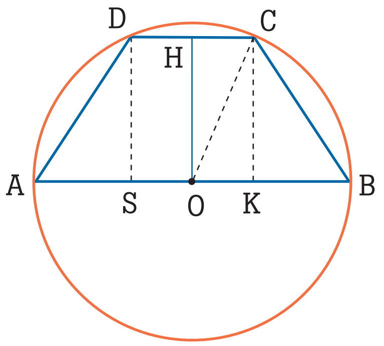
Se le superfici laterali sono equivalenti, hanno la stessa estensione:

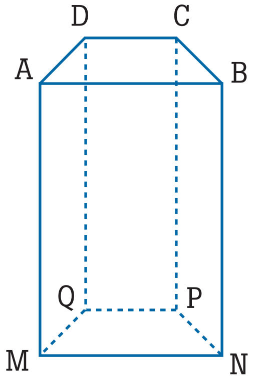
$S_l = 2p_{ABC} \cdot BD = (108 \cdot 14)\ cm^2 = 1512\ cm^2$

$2p_{MNPQ} = (9 \cdot 4)\ cm = 36\ cm$

$PR = \dfrac{S_l}{2p_{MNPQ}} = \dfrac{1512}{36}\ cm = 42\ cm$

16 In un cerchio avente l'area di 1962,50 cm^2 è inscritto un trapezio avente per base maggiore il diametro e per base minore una corda che dista 24 cm dal centro del cerchio. Calcola l'area e il perimetro del trapezio e l'area della superficie laterale del prisma retto avente per base il trapezio e il cui volume è uguale a 23 040 cm^3.





A_c = 1962,50 cm^2
OH = 24 cm
V = 23 040 cm^3
A_{ABCD} = ?
$2p_{ABCD}$ = ?
S_l = ?

Ricordiamo che in una circonferenza si può inscrivere solo un trapezio isoscele.

$$OC = \sqrt{\frac{A_c}{3{,}14}} = \sqrt{\frac{1962{,}50}{3{,}14}}\ \text{cm} = \sqrt{625}\ \text{cm} = 25\ \text{cm}$$

$$CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{25^2 - 24^2}\ \text{cm} = \sqrt{49}\ \text{cm} = 7\ \text{cm}$$

DC = 2 · CH = 2 · 7 cm = 14 cm

Calcoliamo la lunghezza del lato obliquo CB nel triangolo CKB, rettangolo in K:

$$KB = SA = \frac{AB - CD}{2} = \frac{50 - 14}{2}\ \text{cm} = 18\ \text{cm}$$

$$CB = \sqrt{CK^2 + KB^2} = \sqrt{24^2 + 18^2}\ \text{cm} = \sqrt{900}\ \text{cm} = 30\ \text{cm}$$

$2p_{ABCD}$ = AB + CB + DC + AD = (50 + 30 + 14 + 30) cm = 124 cm

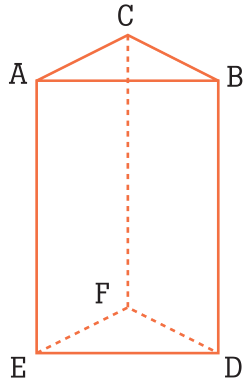
$$A_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot CK}{2} = \frac{(50 + 14) \cdot 24}{2}\ \text{cm}^2 = 768\ \text{cm}^2$$

Il volume del solido è dato, quindi possiamo ricavare la sua altezza BN:

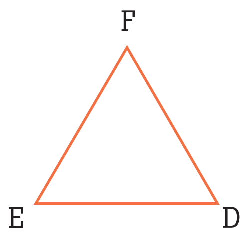
$$BN = \frac{V}{A_{ABCD}} = \frac{23\,040}{768}\ \text{cm} = 30\ \text{cm}$$

$S_l = 2p_{ABCD}$ · BN = (124 · 30) cm^2 = 3720 cm^2

17 La somma di tutti gli spigoli di un prisma triangolare regolare è lunga 60 cm e lo spigolo laterale è il doppio dello spigolo di base. Calcola la superficie laterale del prisma.



AB + BC + CA + EF + FD + DE + AE + BD + CF = 60 cm
AE = 2AB
S_l = ?



Gli spigoli del prisma sono:
spigoli laterali: AE = CF = BD
spigoli di base: AB = BC = CA = ED = DF = FE

ED ⇒

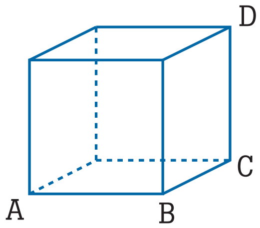
AE ⇒

Calcoliamo la somma degli spigoli utilizzando la rappresentazione grafica:


= 12 parti uguali

60 cm : 12 = 5 cm $\Rightarrow$ lunghezza di una parte
ED = 5 cm $\Rightarrow$ spigolo di base
AE = $2 \cdot 5$ cm = 10 cm $\Rightarrow$ spigolo laterale
$2p_{ABC} = 5 \cdot 3$ cm = 15 cm
$S_l = 2p_{ABC} \cdot BD = (15 \cdot 10)$ cm^2 = 150 cm^2

18 Il volume di un cubo di ferro (p_s = 7,5) è dato in dm^3 dalla radice della seguente equazione:
$4(1 + x) + 3(3 - 2x) = 3(2x + 7) + 12(1 - x) + 12$
Calcola la lunghezza dello spigolo del cubo, la sua superficie totale e il peso del cubo.
Se fondiamo il cubo di ferro per ottenere tanti prismi quadrangolari regolari alti 2 cm e con lo spigolo di base lungo 3,5 cm, quanti prismi otteniamo? Quanto ferro va perso?



V = 8 dm^3
p_s = 7,5
AB = ?
S_t = ?
P = ?

Risolviamo l'equazione:
$4 + 4x + 9 - 6x = 6x + 21 + 12 - 12x + 12$
$13 - 2x = -6x + 45$
$6x - 2x = 45 - 13$
$4x = 32 \Rightarrow x = 8$

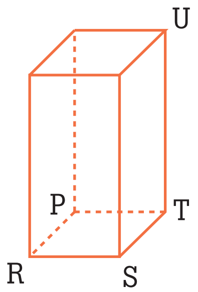
AB = $\sqrt[3]{8}$ dm = 2 dm
$S_t = 6\text{AB}^2 = (6 \cdot 2^2)$ dm^2 = 24 dm^2
$P = V \cdot p_s = (8 \cdot 7{,}5)$ kg = 60 kg

Briciole di teoria

Se il volume è espresso in dm^3, il peso, ottenuto moltiplicando il volume per il peso specifico, è espresso in chilogrammi. Ricorda la corrispondenza:

m^3 $\Leftrightarrow$ t
dm^3 $\Leftrightarrow$ kg
cm^3 $\Leftrightarrow$ g

Calcoliamo il volume del prisma:
$V' = S_{PRST} \cdot UT = (3{,}5^2 \cdot 2)$ cm^3 = 24,5 cm^3



UT = 2 cm
RS = 3,5 cm
V' = ?

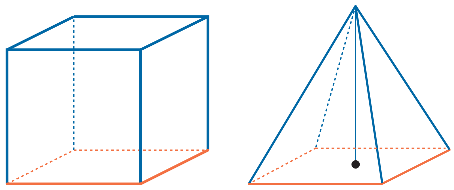
Calcoliamo il peso di un prisma:
$P' = V' \cdot p_s = (24{,}5 \cdot 7{,}5)$ g = 183,75 g

Il peso del cubo di ferro è 60 kg che equivalgono a 60 000 g:
(60 000 : 183,75) = 326,5306 $\Rightarrow$ numero di prismi

I prismi che possiamo ottenere sono 326 che pesano in tutto:
$326 \cdot 183{,}75$ g = 59 902,5 g

Il ferro a disposizione era 60 000 g, quindi:
60 000 g – 59 902,5 g = 97,5 g $\Rightarrow$ quantità di ferro persa.

19 Un prisma ha il volume di 468 cm^3. Calcola il volume della piramide avente la stessa base e la stessa altezza del prisma.

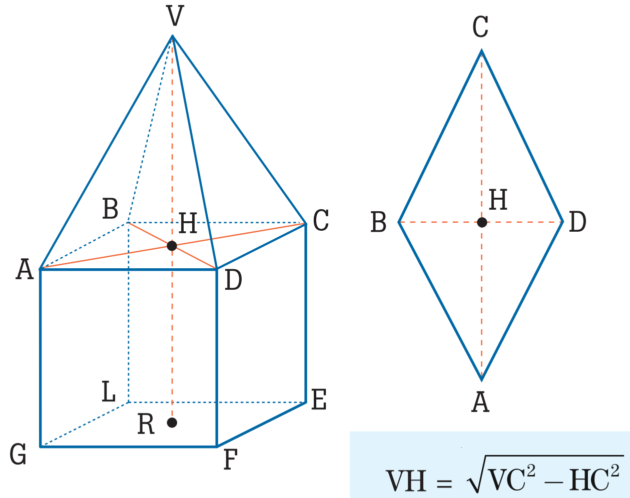


V_{prisma} = 468 cm^3 $\Rightarrow$ $V_{piramide} = \frac{1}{3}V_{prisma} = \left(\frac{1}{3} \cdot 468\right)$ cm^3 = 156 cm^3

Briciole di teoria

Un prisma, avente stessa base e stessa altezza di una piramide, è equivalente al triplo della piramide stessa.

20 Un solido è formato da un parallelepipedo retto a base rombica cui è sovrapposta, con base coincidente, una piramide retta e pesa 6,6 kg. Le diagonali del rombo sono lunghe 30 cm e 15 cm, mentre lo spigolo laterale maggiore della piramide è lungo 17 cm. Determina l'altezza complessiva del solido, sapendo che esso è costruito con un materiale con $p_s = 2$.



P = 6,6 kg
AC = 30 cm
BD = 15 cm
VC = 17 cm
$p_s = 2$
VR = ?

Calcoliamo il volume del solido:

$$V = \frac{P}{p_s} = \frac{6{,}6}{2}\ \text{dm}^3 = 3{,}3\ \text{dm}^3 = 3300\ \text{cm}^3$$

$$S_b = \frac{\text{AC} \cdot \text{BD}}{2} = \frac{30 \cdot 15}{2}\ \text{cm}^2 = 225\ \text{cm}^2$$

Il triangolo VHC è rettangolo in H:

$$\text{VH} = \sqrt{\text{VC}^2 - \text{HC}^2} = \sqrt{17^2 - 15^2}\ \text{cm} = \sqrt{64}\ \text{cm} = 8\ \text{cm}$$

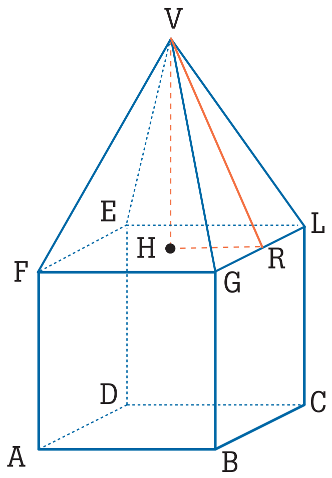
$$V_{\text{piramide}} = \frac{S_b \cdot \text{VH}}{3} = \frac{225 \cdot 8}{3}\ \text{cm}^3 = 600\ \text{cm}^3$$

$$V_{\text{prisma}} = V - V_{\text{piramide}} = 3300\ \text{cm}^3 - 600\ \text{cm}^3 = 2700\ \text{cm}^3$$

$$\text{CE} = \frac{V_{\text{prisma}}}{S_b} = \frac{2700}{225}\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$$

$$\text{VR} = \text{VH} + \text{HR} = 8\ \text{cm} + 12\ \text{cm} = 20\ \text{cm}$$

21 Un solido è formato da un cubo sormontato da una piramide retta avente la base coincidente con una faccia del cubo. L'area di base è di 1296 cm^2 e l'altezza della piramide è lunga 24 cm. Sapendo che il solido è in acciaio ($p_s = 7{,}5$), calcola la superficie totale e il peso del solido.



$S_b = 1296\ \text{cm}^2$
VH = 24 cm
$p_s = 7{,}5$
$S_t = ?$
$P = ?$

Calcoliamo la lunghezza dello spigolo di base:

$$\text{AB} = \sqrt{1296}\ \text{cm} = 36\ \text{cm}$$

Il triangolo VRH è rettangolo in H; calcoliamo la lunghezza dell'apotema VR della piramide applicando il teorema di Pitagora e osservando che $\text{HR} = \frac{1}{2}\text{AB} = \frac{1}{2} \cdot 36\ \text{cm} = 18\ \text{cm}$:

$$\text{VR} = \sqrt{\text{VH}^2 + \text{HR}^2} = \sqrt{24^2 + 18^2}\ \text{cm} = \sqrt{900}\ \text{cm} = 30\ \text{cm}$$

$$S_{l\ \text{piramide}} = \frac{2p_{\text{ABCD}} \cdot \text{VR}}{2} = \frac{4 \cdot 36 \cdot 30}{2}\ \text{cm}^2 = 2160\ \text{cm}^2$$

$$S_t = 5S_b + S_{l\ \text{piramide}} = (5 \cdot 1296 + 2160)\ \text{cm}^2 = 8640\ \text{cm}^2$$

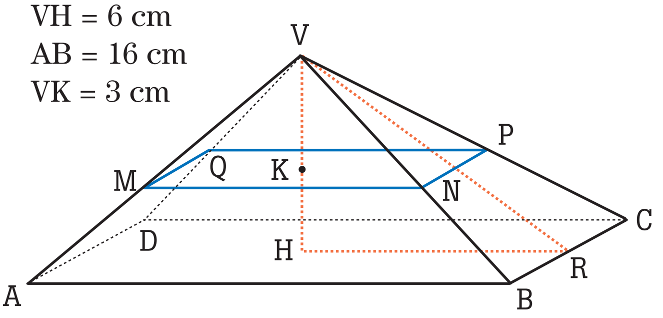
$$V_{\text{piramide}} = \frac{S_b \cdot \text{VH}}{3} = \frac{1296 \cdot 24}{3}\ \text{cm}^3 = 10\,368\ \text{cm}^3$$

$V_{\text{cubo}} = \text{AB}^3 = (36^3)\ \text{cm}^3 = 46\,656\ \text{cm}^3$
$V = V_{\text{piramide}} + V_{\text{cubo}} = (10\,368 + 46\,656)\ \text{cm}^3 = 57\,024\ \text{cm}^3$
$P = V \cdot p_s = (57\,024 \cdot 7{,}5)\ \text{g} = 427\,680\ \text{g}$
dove il peso è espresso in grammi perché il volume è espresso in cm^3.

22 Una piramide quadrangolare regolare ha l'altezza lunga 6 cm e il lato di base lungo 16 cm. Considera la piramide ottenuta sezionandola con un piano parallelo alla base e distante 3 cm dal vertice. Calcola il rapporto tra il volume delle due piramidi.

Tagliando la piramide con un piano parallelo alla base della piramide otteniamo due solidi: un tronco di piramide e una piramide più piccola la cui base MNPQ è un poligono simile al poligono di base della piramide data: quindi ABCD e MNPQ sono quadrati. Dai dati possiamo ricavare:

VH = 6 cm
AB = 16 cm
VK = 3 cm



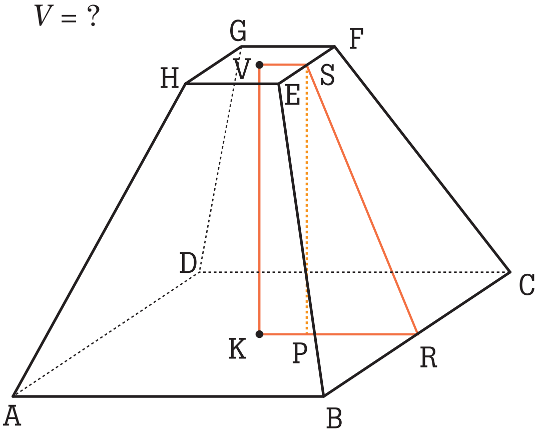
$VK = \frac{1}{2}VH$

La piramide di base MNPQ è simile alla piramide di base ABCD, quindi il rapporto tra i volumi è uguale al cubo del rapporto di similitudine; essendo il rapporto di similitudine uguale a $\frac{1}{2}$, abbiamo che il rapporto tra i volumi è $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Con questa risoluzione il dato AB = 16 cm è superfluo.

23 L'area della superficie totale di un tronco di piramide quadrangolare regolare è 168 cm^2 e gli spigoli di base sono lunghi rispettivamente 2 cm e 8 cm. Calcola il volume del tronco di piramide.

$S_t = 168 \text{ cm}^2$
AB = 8 cm
HE = 2 cm
$V = ?$



$S_B = S_{ABCD} = (8^2) \text{ cm}^2 = 64 \text{ cm}^2$

$S_b = S_{HEFG} = (2^2) \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2$

Dalla S_t del tronco ricaviamo la S_l:

$S_l = S_t - S_b - S_B = (168 - 64 - 4) \text{ cm}^2 = 100 \text{ cm}^2$

$2p_{ABCD} = AB \cdot 4 = (8 \cdot 4) \text{ cm} = 32 \text{ cm}$

$2p_{EFGH} = HE \cdot 4 = (2 \cdot 4) \text{ cm} = 8 \text{ cm}$

Ricaviamo l'apotema SR:

$$SR = \frac{S_l \cdot 2}{2p_{ABCD} + 2p_{EFGH}} = \frac{100 \cdot 2}{32 + 8} \text{ cm} = \frac{200}{40} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

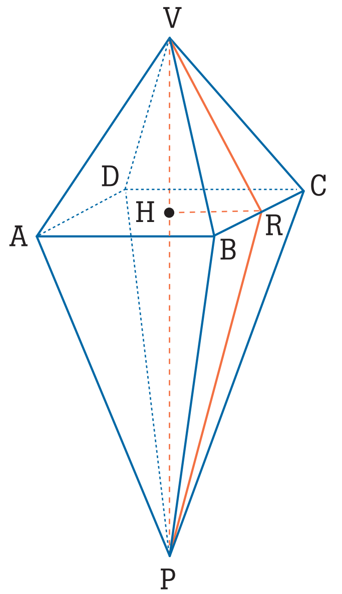
Dobbiamo calcolare l'altezza VK che è congruente a SP. Il triangolo SPR è rettangolo in P, quindi applichiamo il teorema di Pitagora sapendo che PR = KR – VS = 4 cm – 1 cm = 3 cm:

$$SP = \sqrt{SR^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} \text{ cm} = \sqrt{16} \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\left(S_b + S_B + \sqrt{S_b \cdot S_B}\right) \cdot h}{3} = \frac{\left(64 + 4 + \sqrt{64 \cdot 4}\right) \cdot 4}{3} \text{ cm}^3 = \frac{(64 + 4 + 16) \cdot 4}{3} \text{ cm}^3 = 112 \text{ cm}^3$$

24 Un solido è costituito da due piramidi quadrangolari regolari aventi la base in comune e i vertici situati da parti opposte rispetto al piano di base. La prima piramide è alta 18 cm e ha il volume di 13 824 cm^3. Sapendo che l'area della superficie laterale della seconda piramide è 3840 cm^2, calcola il volume del solido.

VH = 18 cm
V_{ABCDV} = 13 824 cm^3
$S_{l\ ABCDP}$ = 3840 cm^2
V = ?



Calcoliamo l'area di base delle due piramidi:

$$A_{ABCD} = \frac{V_{ABCDV} \cdot 3}{VH} = \frac{13\,824 \cdot 3}{18}\ \text{cm}^2 = 2304\ \text{cm}^2$$

$$AB = \sqrt{2304}\ \text{cm} = 48\ \text{cm}$$

$$2p_{ABCD} = (48 \cdot 4)\ \text{cm} = 192\ \text{cm}$$

Calcoliamo l'apotema della seconda piramide:

$$RP = \frac{S_{l\ ABCDP} \cdot 2}{2p_{ABCD}} = \frac{3840 \cdot 2}{192}\ \text{cm} = 40\ \text{cm}$$

Il triangolo RHP è rettangolo in H; calcoliamo l'altezza della seconda piramide:

$$PH = \sqrt{RP^2 - RH^2} = \sqrt{40^2 - 24^2}\ \text{cm} = \sqrt{1024}\ \text{cm} = 32\ \text{cm}$$

Calcoliamo il volume della seconda piramide:

$$V_{ABCDP} = \frac{A_{ABCD} \cdot PH}{3} = \frac{2304 \cdot 32}{3}\ \text{cm}^3 = 24\,576\ \text{cm}^3$$

$$V = V_{ABCDV} + V_{ABCDP} = (13\,824 + 24\,576)\ \text{cm}^3 = 38\,400\ \text{cm}^3$$

I solidi di rotazione

25 **Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

a V F L'area della superficie di base di un cilindro può essere maggiore, uguale o minore di quella della superficie laterale.

b V F Un cilindro equilatero è generato dalla rotazione completa di un quadrato intorno a un suo lato.

c V F Se l'altezza di un cilindro raddoppia, anche l'area delle superficie laterale raddoppia.

d V F Un cilindro equilatero è generato dalla rotazione completa intorno al lato maggiore di un rettangolo avente una dimensione doppia dell'altra.

a V La superficie di base di un cilindro dipende solo dalla lunghezza del raggio, mentre la superficie laterale dipende da raggio e altezza. Variando l'altezza e tenendo fisso il raggio, possiamo rendere la superficie laterale grande o piccola a piacere.

b F Un cilindro è equilatero se il diametro di base è uguale all'altezza, mentre se un quadrato ruota attorno a un suo lato si ottiene un cilindro in cui l'altezza è uguale al raggio ed è quindi la metà di un diametro.

c V La superficie laterale e l'altezza sono direttamente proporzionali.

d V Un cilindro equilatero ha l'altezza uguale al diametro di base, quindi l'altezza è il doppio del raggio di base che è la dimensione minore del rettangolo.

e V F L'altezza di un tronco di cono è sempre minore dell'apotema.

f V F L'apotema di un tronco di cono non può essere minore del più piccolo dei raggi di base.

g V F Due coni aventi la stessa altezza e lo stesso raggio di base sono congruenti.

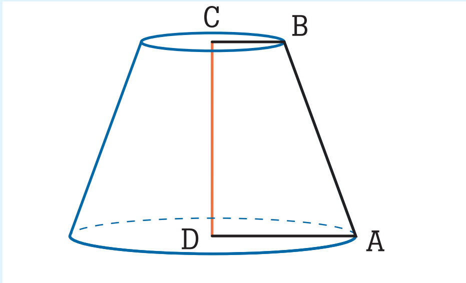
h V F Due coni che hanno le superfici di base e laterale rispettivamente equivalenti sono congruenti.

i V F L'intersezione fra un piano e una sfera secanti è sempre un cerchio.

l V F Se il piano che interseca una sfera passa per il suo centro, l'intersezione è il cerchio massimo della sfera.

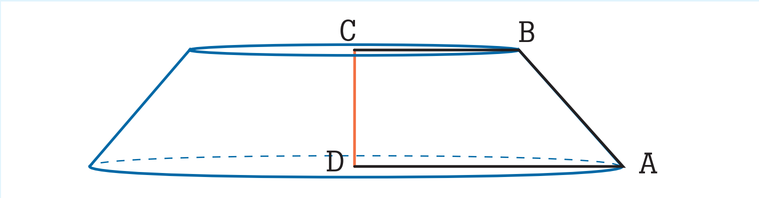
m V F Se un piano è secante a una sfera, il piano si trova a una distanza dal centro minore del raggio.

e V Un tronco di cono si ottiene dalla rotazione di un trapezio rettangolo attorno al lato perpendicolare alle basi: l'apotema è uguale al lato obliquo del trapezio che è maggiore dell'altezza.



$AB > CD$

f F I due raggi di base del tronco sono le due basi del trapezio rettangolo che lo genera, mentre l'apotema del tronco coincide con il lato obliquo del trapezio. Ma in un trapezio possiamo prendere la base minore grande a piacere, lasciando invariato il lato obliquo.



$AB < BC$

g V Se due coni hanno la stessa altezza e lo stesso raggio di base sono generati dalla rotazione di due triangoli rettangoli con i cateti uguali e che sono, quindi, uguali per il primo criterio di congruenza dei triangoli.

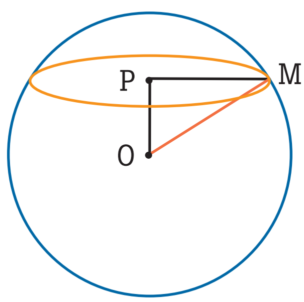
h V Se le basi sono equivalenti hanno lo stesso raggio e quindi la stessa circonferenza di base; se le superfici laterali sono equivalenti, avendo la stessa circonferenza di base hanno anche uguali gli apotemi, perciò i due coni sono congruenti.

i V Sezionando una sfera con un piano si ottiene un cerchio che ha per centro il piede della distanza tra il centro della sfera e il piano.

l V La distanza tra il centro della sfera e il piano è nulla e quindi il raggio della sfera coincide con il raggio della sezione. Ovviamente questo è il cerchio massimo, perché una sfera non può contenere un cerchio con un raggio maggiore di quello della sfera.

m V Il raggio della sezione e la distanza del piano dal centro della sfera sono i cateti di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è il raggio della sfera e un cateto è sempre minore dell'ipotenusa.

$OP < OM$



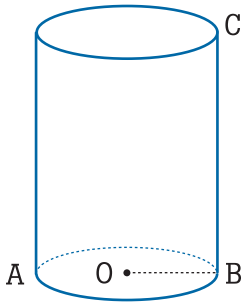
Risolvi i seguenti problemi.

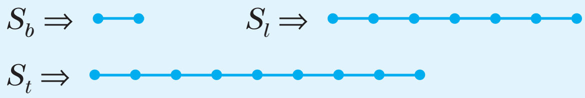
26 La superficie totale di un cilindro è di 128π cm². Sapendo che ogni base è $\frac{1}{6}$ della superficie laterale, calcola la lunghezza dell'altezza del cilindro.

$S_t = 128\pi \text{ cm}^2$

$S_b = \frac{1}{6} S_l$

BC = ?





$$S_b = \frac{128\pi}{8} \text{ cm}^2 = 16\pi \text{ cm}^2$$

$$OB = \sqrt{\frac{S_b}{\pi}} = \sqrt{\frac{16\pi}{\pi}} \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

$$S_l = (16\pi \cdot 6) \text{ cm}^2 = 96\pi \text{ cm}^2$$

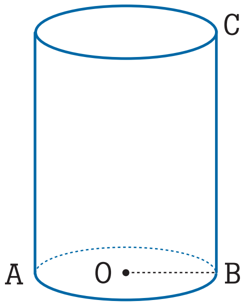
$$BC = \frac{S_l}{2\pi \cdot OB} = \frac{96\pi}{2\pi \cdot 4} \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$

27 La superficie totale di un cilindro è 240π cm² e la sua circonferenza di base è 12π cm. Calcola il volume del cilindro.

$S_t = 240\pi \text{ cm}^2$

$c = 12\pi$ cm

$V = ?$



$$OB = \frac{c}{2\pi} = \frac{12\pi}{2\pi} \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

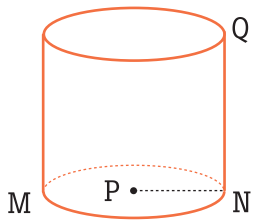
$$S_b = OB^2 \cdot \pi = (6^2 \cdot \pi) \text{ cm}^2 = 36\pi \text{ cm}^2$$

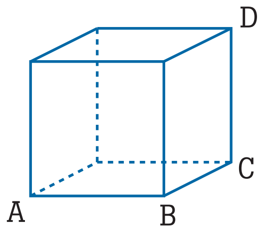
$$S_l = S_t - 2S_b = (240\pi - 2 \cdot 36\pi) \text{ cm}^2 = 168\pi \text{ cm}^2$$

$$CB = \frac{S_l}{2\pi \cdot OB} = \frac{168\pi}{2\pi \cdot 6} \text{ cm} = 14 \text{ cm}$$

$$V = S_b \cdot CB = (36\pi \cdot 14) \text{ cm}^3 = 504\pi \text{ cm}^3$$

28 Determina la superficie totale di un cilindro equilatero equivalente ai $\frac{157}{25}$ di un cubo la cui area della superficie totale è 2400 cm².





$S_{t\ \text{cubo}} = 2400 \text{ cm}^2$

$S_{t\ \text{cilindro}} = ?$

$V_{\text{cilindro}} = \frac{157}{25} V_{\text{cubo}}$

$$S_{t\ \text{cubo}} = 6l^2 \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{\frac{S_t}{6}}$$

$$l = AB = \sqrt{\frac{2400}{6}} \text{ cm} = \sqrt{400} \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

$$V_{\text{cubo}} = l^3 = (20^3) \text{ cm}^3 = 8000 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cilindro}} = \frac{157}{25} \cdot 8000 \text{ cm}^3 = 50\,240 \text{ cm}^3$$

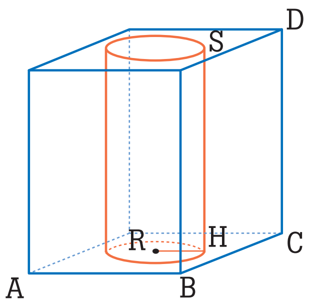
Il cilindro equilatero ha il diametro di base uguale all'altezza:

$$V = 2\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$r = PN = \sqrt[3]{\frac{50\,240}{2 \cdot 3{,}14}} \text{ cm} = \sqrt[3]{8000} \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

$$S_t = 6\pi r^2 = (6\pi \cdot 20^2) \text{ cm}^2 = 2400\pi \text{ cm}^2$$

29 Un solido è costituito da un cubo con lo spigolo lungo 25 cm in cui è praticato un foro cilindrico. Il raggio di base del foro è i $\frac{2}{5}$ dello spigolo del cubo. Determina l'area della superficie del solido e il suo volume.



AB = BC = CD = 25 cm

$HR = \frac{2}{5}AB$

SH = 25 cm

$S_t = ?$ $V = ?$

Calcoliamo la lunghezza del raggio del foro:

$HR = 25\,\text{cm} \cdot \frac{2}{5} = 10\,\text{cm}$

$S_t = S_{t\ \text{cubo}} - 2S_{b\ \text{cilindro}} + S_{l\ \text{cilindro}}$

$S_{t\ \text{cubo}} = 6AB^2 = (6 \cdot 25^2)\ \text{cm}^2 = 3750\ \text{cm}^2$

$S_{b\ \text{cilindro}} = \pi \cdot RH^2 = (3{,}14 \cdot 10^2)\ \text{cm}^2 = 314\ \text{cm}^2$

$S_{l\ \text{cilindro}} = 2\pi \cdot HR \cdot SH = (2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot 25)\ \text{cm}^2 = 1570\ \text{cm}^2$

$S_t = (3750 - 2 \cdot 314 + 1570)\ \text{cm}^2 = 4692\ \text{cm}^2$

$V = V_{\text{cubo}} - V_{\text{cilindro}}$

$V_{\text{cubo}} = AB^3 = (25^3)\ \text{cm}^3 = 15\,625\ \text{cm}^3$

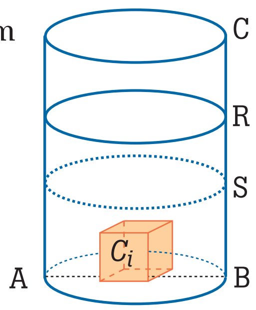
$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot RH^2 \cdot SH = (3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 25)\ \text{cm}^3 = 7850\ \text{cm}^3$

$V = (15\,625 - 7850)\ \text{cm}^3 = 7775\ \text{cm}^3$

30 Un corpo, quando viene completamente immerso in un contenitore cilindrico con il diametro lungo 126 cm, innalza il livello dell'acqua in esso contenuta di 40 cm. Determina il volume del corpo immerso C_i.

AB = 126 cm

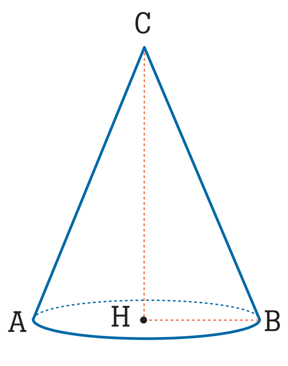
RS = 40 cm



Ricorda che un corpo immerso nell'acqua sposta una quantità di acqua pari al suo volume.
Se l'acqua contenuta nel cilindro si innalza da S a R, il volume del cilindro d'acqua di diametro AB e altezza RS è uguale al volume del corpo immerso.

$$V = \pi \cdot \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \cdot RS = 3{,}14 \cdot \left(\frac{126}{2}\right)^2 \cdot 40\,\text{cm}^3 = 498\,506{,}4\,\text{cm}^3$$

31 L'area della superficie laterale di un cono supera quella di base di 80π cm^2. Sapendo che l'area della superficie totale è 592π cm^2, calcola il volume del cono.



$S_l = S_b + 80\pi\ \text{cm}^2$

$S_t = 592\pi\ \text{cm}^2$

$V = ?$

$S_t = S_l + S_b$

$592\pi\ \text{cm}^2 = S_b + 80\pi\ \text{cm}^2 + S_b$

Si tratta di un'equazione in cui l'incognita è S_b; risolviamola:

$(592\pi - 80\pi)\ \text{cm}^2 = 2S_b \Rightarrow 512\pi\ \text{cm}^2 = 2S_b \Rightarrow$

$\Rightarrow S_b = \frac{512\pi}{2}\,\text{cm}^2 = 256\pi\,\text{cm}^2$

Ricaviamo il raggio BH:

$BH = \sqrt{\frac{S_b}{\pi}} = \sqrt{\frac{256\pi}{\pi}}\,\text{cm} = \sqrt{256}\,\text{cm} = 16\,\text{cm}$

$S_l = S_b + 80\pi\ \text{cm}^2 = (256\pi + 80\pi)\ \text{cm}^2 = 336\pi\ \text{cm}^2$

Calcoliamo l'apotema del cono:

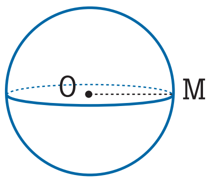
$$CB = \frac{S_l \cdot 2}{2\pi \cdot BH} = \frac{336\pi \cdot 2}{2\pi \cdot 16}\ \text{cm} = 21\ \text{cm}$$

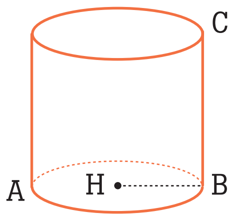
Calcoliamo l'altezza del cono applicando il teorema di Pitagora al triangolo CBH rettangolo in H:

$$CH = \sqrt{CB^2 - HB^2} = \sqrt{21^2 - 16^2}\ \text{cm} = \sqrt{185}\ \text{cm} = 13{,}60\ \text{cm}$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 21^2 \cdot 13{,}60}{3}\ \text{cm}^3 = 1999{,}2\pi\ \text{cm}^3$$

32 Calcola il rapporto tra l'area della superficie di una sfera e l'area della superficie totale di un cilindro equilatero, sapendo che il raggio della sfera è uguale al raggio di base del cilindro.





OM = HB = r AB = BC = $2r$

$$\frac{S_{\text{sfera}}}{S_{t\ \text{cilindro}}} = ?$$

Il problema non fornisce la lunghezza del raggio, quindi indichiamo con r il raggio della sfera e del cilindro. Ricordiamo che in un cilindro equilatero il diametro di base è uguale all'altezza:

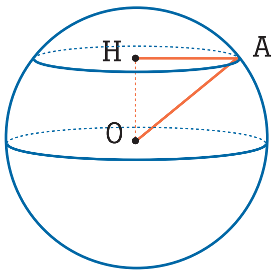
OM = r HB = r CB = $2r$

$S_{\text{sfera}} = 4\pi r^2$

$S_{t\ \text{cilindro}} = 6\pi r^2$

$$\frac{S_{\text{sfera}}}{S_{t\ \text{cilindro}}} = \frac{4\pi r^2}{6\pi r^2} = \frac{2}{3}$$

33 L'area della superficie di una sfera è 676π cm². Determina la distanza che deve avere un piano dal centro della sfera perché il cerchio sezione abbia l'area di 25π cm².



$S_{\text{sfera}} = 676\pi\ \text{cm}^2$

$A_{\text{cerchio}} = 25\pi\ \text{cm}^2$

OH = ?

Calcoliamo il raggio della sfera:

$$OA = \sqrt{\frac{S_{\text{sfera}}}{4\pi}} = \sqrt{\frac{676\pi}{4\pi}}\ \text{cm} = \sqrt{169}\ \text{cm} = 13\ \text{cm}$$

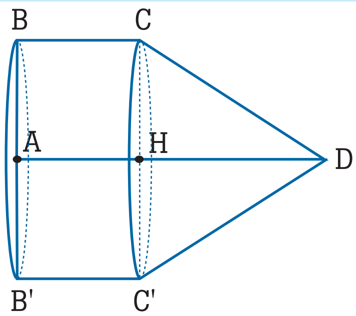
Calcoliamo il raggio del cerchio sezione:

$$AH = \sqrt{\frac{A_{\text{cerchio}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{25\pi}{\pi}}\ \text{cm} = \sqrt{25}\ \text{cm} = 5\ \text{cm}$$

Il triangolo OAH è rettangolo in H; applichiamo il teorema di Pitagora per calcolare OH:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2}\ \text{cm} = \sqrt{144}\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$$

34 Un trapezio rettangolo ha la base maggiore, la base minore e l'altezza lunghe rispettivamente 15 cm, 10 cm e 13 cm. Calcola l'area del trapezio, il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla retta sostegno della base maggiore e il peso del solido, sapendo che è di vetro (p_s = 2,6).



AD = 15 cm BC = 10 cm

CH = 13 cm p_s = 2,6

A_{ABCD} = ? V = ? P = ?

$$A_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot CH}{2} = \frac{(15 + 10) \cdot 13}{2}\ cm^2 = 162{,}5\ cm^2$$

Facendo ruotare il trapezio attorno alla base maggiore si ottiene un solido costituito da un cilindro e da un cono sovrapposti e aventi la base coincidente.

$V = V_{cilindro} + V_{cono}$

$V_{cilindro} = \pi CH^2 \cdot CB = (\pi \cdot 13^2 \cdot 10)\ cm^3 = 1690\pi\ cm^3$

$$V_{cono} = \frac{\pi CH^2 \cdot HD}{3} = \frac{\pi CH^2 \cdot (AD - BC)}{3} = \frac{\pi 13^2 \cdot (15 - 10)}{3}\ cm^3 = 281{,}7\pi\ cm^3$$

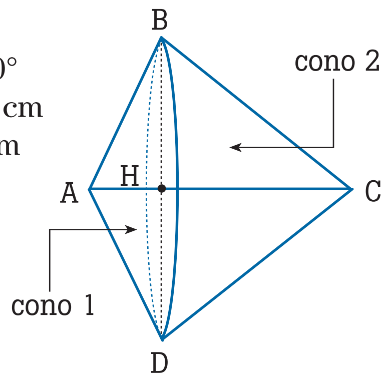
$V = (1690\pi + 281{,}7\pi)\ cm^3 = 1971{,}7\pi\ cm^3$

$P = V \cdot p_s = (1971{,}7 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}6)\ g = 16096{,}95\ g$

Il peso è espresso in grammi perché il volume è espresso in cm^3.

35 Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi rispettivamente 4,5 cm e 6 cm. Calcola l'area e il volume del solido che si ottiene facendogli compiere una rotazione completa attorno all'ipotenusa.

$A\hat{B}C = 90°$
AB = 4,5 cm
BC = 6 cm
$S = ?$
$V = ?$



Facendo ruotare il triangolo attorno all'ipotenusa si ottiene un solido formato da due coni sovrapposti con le basi coincidenti, che indichiamo con 1 e 2.

$S = S_{l\,1} + S_{l\,2}$

$V = V_1 + V_2$

Osservando la figura si può rilevare che:

AB = apotema del cono 1
BC = apotema del cono 2
BH = raggio di base dei due coni
AH = altezza del cono 1
HC = altezza del cono 2

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo ABC per ricavare l'ipotenusa:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(4{,}5)^2 + 6^2}\ cm = \sqrt{56{,}25}\ cm = 7{,}5\ cm$$

Calcoliamo l'altezza relativa all'ipotenusa:

$$BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{4{,}5 \cdot 6}{7{,}5}\ cm = 3{,}6\ cm$$

Applichiamo il primo teorema di Euclide al triangolo ABC:

AH : AB = AB : AC e HC : BC = BC : AC

AH : 4,5 cm = 4,5 cm : 7,5 cm   HC : 6 cm = 6 cm : 7,5 cm

$$AH = \frac{4{,}5 \cdot 4{,}5}{7{,}5}\ cm = 2{,}7\ cm \qquad HC = \frac{6 \cdot 6}{7{,}5}\ cm = 4{,}8\ cm$$

$S_{l\,1} = \pi \cdot BH \cdot AB = (\pi \cdot 3{,}6 \cdot 4{,}5)\ cm^2 = 16{,}2\pi\ cm^2$

$S_{l\,2} = \pi \cdot BH \cdot BC = (\pi \cdot 3{,}6 \cdot 6)\ cm^2 = 21{,}6\pi\ cm^2$

$S = (16{,}2\pi + 21{,}6\pi)\ cm^2 = 37{,}8\pi\ cm^2$

$$V_1 = \frac{\pi \cdot BH^2 \cdot AH}{3} = \frac{\pi \cdot 3{,}6^2 \cdot 2{,}7}{3}\ cm^3 = 11{,}664\pi\ cm^3$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot BH^2 \cdot HC}{3} = \frac{\pi \cdot 3{,}6^2 \cdot 4{,}8}{3}\ cm^3 = 20{,}736\pi\ cm^3$$

$V = (11{,}664\pi + 20{,}736\pi)\ cm^3 = 32{,}4\pi\ cm^3$