Probabilità e statistica

- Statistica
- Probabilità

SEZ. Q

Statistica

Risolvi i seguenti problemi.

1 Paolo ha sulla sua libreria 5 libri di narrativa spessi 3 cm, 3 volumi di una enciclopedia di spessore 5 cm ognuno e 2 vocabolari spessi 9,5 cm. Calcola lo spessore medio dei libri.

Per calcolare lo spessore medio dobbiamo applicare la formula della media ponderata.
Compiliamo la tavola di frequenza:

x = spessore (cm)	3	5	9,5
f = numero libri	5	3	2

$$\text{Media} = \frac{5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 9{,}5}{5 + 3 + 2} = \frac{15 + 15 + 19}{10} = \frac{49}{10} = 4{,}9 \text{ cm}$$

Lo spessore medio dei libri è 4,9 cm.

Briciole di teoria

- **media aritmetica** ⇒ è il quoziente tra la somma dei dati x_i e il loro numero totale N, cioè:
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$$
- **media ponderata** ⇒ se ciascun dato x_i si presenta con una frequenza f_i (detto anche "peso") la media si può calcolare mediante la formula:
$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

2 In una settimana estiva vengono registrate quotidianamente le temperature massime di 3 città italiane. Calcola quale città ha avuto la più alta temperatura massima media.

Temperature in gradi centigradi							
	Lun	Mar	Mer	Gio	Ven	Sab	Dom
Firenze	29	32	32	35	38	38	34
Como	30	29	31	34	32	33	35
Napoli	32	35	33	34	31	32	34

Calcoliamo la temperatura media della città di Firenze:

$$\text{Media}_{\text{Firenze}} = \frac{29 + 32 + 32 + 35 + 38 + 38 + 34}{7} = \frac{238}{7} = 34$$

Calcoliamo la temperatura media della città di Como:

$$\text{Media}_{\text{Como}} = \frac{30 + 29 + 31 + 34 + 32 + 33 + 35}{7} = \frac{224}{7} = 32$$

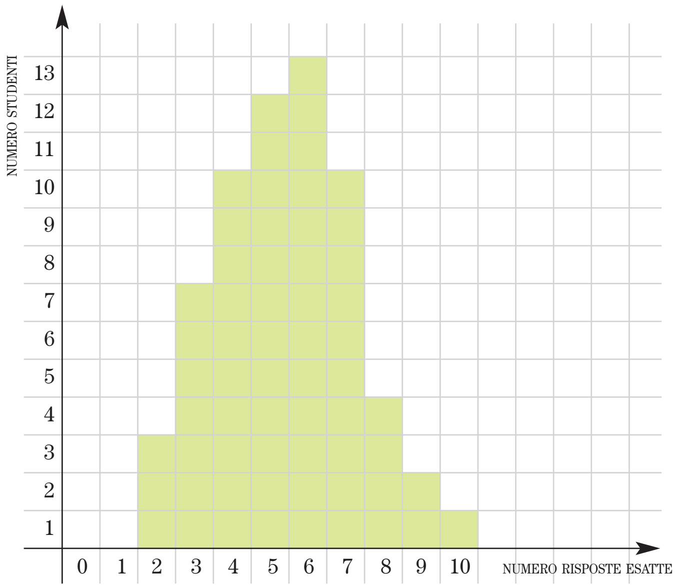
Calcoliamo la temperatura media della città di Napoli:

$$\text{Media}_{\text{Napoli}} = \frac{32 + 35 + 33 + 34 + 31 + 32 + 34}{7} = \frac{231}{7} = 33$$

La più alta temperatura media si è registrata a Firenze.

3 Tutti gli studenti che frequentano il terzo anno di una Scuola Secondaria di Primo Grado sono stati sottoposti a un test di matematica costituito da 10 quesiti. I risultati del test sono riportati nella figura sottostante. Determina:

a il numero degli studenti sottoposti al test;
b la moda della distribuzione;
c la mediana della distribuzione;
d il valore medio delle risposte esatte.



Briciole di teoria

- Il valor medio **moda** è dato dal valore della distribuzione che si ripete il maggior numero di volte.
- Il valor medio **mediana**, in una successione crescente o decrescente, è il valore che occupa la posizione centrale se la successione ha un numero dispari di termini, è invece la media aritmetica dei due dati che occupano le posizioni centrali quando la successione è formata da un numero pari di termini.

a Per calcolare il numero totale degli studenti basta sommare quanti studenti hanno correttamente risposto a nessuna, 1, 2, … , 10 domande, cioè basta contare i quadretti del grafico: il numero richiesto è 62.
b Sul grafico si osserva che il risultato con la maggior frequenza, cioè la moda, è “6 risposte esatte” che ha una frequenza pari a 13.
c Poiché i dati sono 62, che è un numero pari, dobbiamo considerare i due valori centrali, che sono il 31° e il 32°; quindi bisogna contare nel grafico 31 quadretti a partire da quelli della colonna “2 risposte esatte”: si trova che i dati centrali si trovano entrambi nella colonna “5 risposte esatte”, quindi la mediana è 5.
d Il valor medio è dato da:

$$\text{Media} = \frac{3\cdot 2+7\cdot 3+10\cdot 4+12\cdot 5+13\cdot 6+10\cdot 7+4\cdot 8+2\cdot 9+1\cdot 10}{62} =$$

$$= \frac{6+21+40+60+78+70+32+18+10}{62} = \frac{335}{62} \cong 5{,}4$$

Ogni studente ha dato in media circa 5,4 risposte esatte.

4 Cinque impiegati hanno i seguenti stipendi annui lordi (in migliaia di euro): 48, 35, 52, 39, 46. Determina quanto guadagna mediamente ciascun impiegato.

Determiniamo la media aritmetica:

$$\text{Media} = \frac{48+35+52+39+46}{5} = \frac{220}{5} = 44$$

Lo stipendio medio annuo è di 44 000 euro.

5 Nella seguente tabella sono riportati i dati relativi al tempo impiegato a risolvere 20 test dai 300 partecipanti ad un concorso. Rispondi alle seguenti domande.

Tempo (in minuti)	15	12	10	9	6
Frequenza	25	39	125	82	29

a Qual è la moda?
b Coincide con la mediana?
c Qual è la percentuale dei partecipanti che ha impiegato un tempo inferiore di quello indicato dalla mediana?

a La moda è 10 minuti perché è il valore che si ripete più volte (125).
b La mediana, cioè il valore centrale, è ancora 10: infatti, i valori centrali occupano le posizioni 150 e 151, e poiché $29 + 82 < 150$ e $29 + 82 + 125 > 151$, entrambi corrispondono a partecipanti che hanno impiegato 10 minuti; quindi moda e mediana coincidono.
c I partecipanti che hanno impiegato meno di 10 minuti per risolvere i quesiti sono $82 + 29 = 111$.
I partecipanti totali sono 300, la percentuale quindi è $\frac{111}{300} = 37\%$.

6 Pietro ha ben figurato nella stagione della sua squadra di calcio, infatti in 10 partite ha segnato i seguenti goal: 1, 2, 4, 1, 4, 4, 0, 1, 1, 2. Qual è la sua media di goal a partita?

Calcoliamo la media aritmetica:

$$\text{Media} = \frac{1+2+4+1+4+4+0+1+1+2}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

Pietro ha segnato in media 2 goal a partita.

7 Le paghe orarie di un gruppo di 10 operai risultano essere: € 18, € 21, € 18,50, € 23, € 18, € 18, € 17, € 16, € 15, € 24. Determina:

a la paga oraria media;
b la paga oraria mediana;
c la paga oraria modale.

a Paga oraria media $= \frac{18+21+18{,}50+23+18+18+17+16+15+24}{10} =$

$$= \frac{188{,}5}{10} = 18{,}85$$

La paga oraria media è € 18,85.

b Scriviamo i dati in ordine crescente:

15 – 16 – 17 – 18 – 18 – 18 – 18,50 – 21 – 23 – 24

I dati che occupano la posizione centrale sono due perché la sequenza è formata da un numero pari di valori, quindi calcoliamo la media aritmetica di tali termini:

$$\frac{18+18}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

La paga oraria mediana è € 18.

c Il termine che si ripete più volte è 18, quindi la paga oraria modale è € 18.

8 Durante un censimento si è rilevato il numero di persone che abitano in ciascun appartamento di via Verdi. I risultati sono riportati in tabella.

N. di persone per appartamento	1	2	3	4	5	6	7
N. di appartamenti	6	18	25	17	9	4	3

a Quanti appartamenti sono stati censiti?

b Indica la moda della distribuzione.

c Determina il valor medio di persone per appartamento.

a Numero di appartamenti censiti $= 6 + 18 + 25 + 17 + 9 + 4 + 3 = 82$.

b La moda è 3 persone per appartamento perché ha la frequenza maggiore, pari a 25.

c La media è:

$$\frac{6\cdot1+18\cdot2+25\cdot3+17\cdot4+9\cdot5+4\cdot6+3\cdot7}{82} = \frac{275}{82} \cong 3{,}4.$$

Probabilità

Risolvi i seguenti problemi.

9 Calcola la probabilità che estraendo a caso una carta da un mazzo da 40 carte si ottenga:

a l'asso di picche;
b un re;
c una carta che non sia una donna.

Briciole di teoria

La **probabilità** del verificarsi di un evento A si indica con P_A o $P(A)$ ed è data dal rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.
Il valore numerico della probabilità è sempre maggiore o uguale a zero e minore o uguale a uno: $0 \leq P_A \leq 1$.

a Per l'evento "asso di picche" il numero dei casi favorevoli è 1 e quello dei casi possibili è 40, quindi $P_{\text{asso di picche}} = \dfrac{1}{40}$.

b Per l'evento "un re" il numero dei casi favorevoli è 4 e quello dei casi possibili è 40, quindi $P_{\text{re}} = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10}$.

c Per l'evento "una carta che non sia una donna" il numero dei casi favorevoli è $40 - 4 = 36$ e quello dei casi possibili è 40, quindi $P_{\text{non sia donna}} = \dfrac{36}{40} = \dfrac{9}{10}$.

10 Un'urna contiene 30 palline numerate da 1 a 30. Calcola la probabilità di estrarre:

a una pallina con numero pari;
b una pallina con numero maggiore di 21;
c una pallina con numero minore o uguale a 5.

a I casi favorevoli sono 15, i casi possibili sono 30, quindi $P_{\text{pari}} = \dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2}$.

b I casi favorevoli sono 9 (22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30), i casi possibili sono 30, quindi $P_{>21} = \dfrac{9}{30} = \dfrac{3}{10}$.

c I casi favorevoli sono 5 (1, 2, 3, 4, 5), i casi possibili sono 30, quindi $P_{\leq 5} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$.

11 Calcola la probabilità che nel gioco della tombola il primo numero estratto sia:

a il 90;
b dispari;
c maggiore di 6 e minore di 11.

a L'unico caso favorevole è il 90, quindi il numero dei casi favorevoli è 1, i casi possibili sono 90, quindi $P_{90} = \frac{1}{90}$.

b Nel gioco della tombola ci sono 90 numeri; quelli dispari, che rappresentano i casi favorevoli, sono 45 e quindi $P_{\text{dispari}} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$.

c I casi favorevoli sono i numeri 7, 8, 9, 10, quindi il numero dei casi favorevoli è 4, perciò $P_{6<n<11} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$.

12 Per effettuare un'indagine di mercato viene costituito un campione di donne da intervistare formato da 40 casalinghe, 70 impiegate, 30 insegnanti e 60 commesse. Calcola qual è la probabilità di intervistare casualmente:

a una casalinga o un'insegnante;
b una commessa o un'impiegata;
c una casalinga o una commessa.

Casalinghe = 40
Impiegate = 70
Insegnanti = 30
Commesse = 60

Totale donne intervistate = 200 = numero casi possibili

a I casi favorevoli sono 40 + 30 = 70 $\Rightarrow$ $P_{\text{casalinga o insegnante}} = \frac{70}{200} = \frac{7}{20} = 35\%$

b I casi favorevoli sono 60 + 70 = 130 $\Rightarrow$ $P_{\text{commessa o impiegata}} = \frac{130}{200} = \frac{13}{20} = 65\%$

c I casi favorevoli sono 40 + 60 = 100 $\Rightarrow$ $P_{\text{casalinga o commessa}} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} = 50\%$

Questo problema può essere risolto anche applicando la formula relativa alla probabilità totale di eventi incompatibili; risolviamo il punto **a**.

$$P_{\text{casalinga}} = \frac{40}{200} \qquad P_{\text{insegnante}} = \frac{30}{200} \Rightarrow$$

$$P_{\text{casalinga o insegnante}} = \frac{40}{200} + \frac{30}{200} = \frac{70}{200} = \frac{7}{20} = 35\%$$

Siamo pervenuti allo stesso risultato ottenuto con il procedimento precedente.

Briciole di teoria

Due eventi A e B si dicono **incompatibili** se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro.

La **probabilità totale** di due eventi incompatibili è data da

$P_{A \cup B} = P_A + P_B$

dove $A \cup B$ è l'evento unione, corrispondente al verificarsi di A, di B o di entrambi.

13 In una cantina ci sono 110 vasetti di marmellata: 33 di mirtilli, 11 di ciliegie, 44 di pere e i rimanenti di uva. Considera di prendere un vasetto a caso e calcola le seguenti probabilità:

a che sia di pere o di mirtilli;
b che sia di ciliegie o di uva;
c che sia di mirtilli o di uva.

33 = numero di vasetti di marmellata di mirtilli
11 = numero di vasetti di marmellata di ciliegie
44 = numero di vasetti di marmellata di pere
(110 – 33 – 11 – 44) = 22 = numero di vasetti di marmellata di uva

a $P_{P\,o\,M} = \frac{44+33}{110} = \frac{77}{110} = \frac{7}{10} = 70\%$

b $P_{C\,o\,U} = \frac{11+22}{110} = \frac{33}{110} = \frac{3}{10} = 30\%$

c $P_{M\,o\,U} = \frac{33+22}{110} = \frac{55}{110} = \frac{5}{10} = 50\%$

14 In un sacco ci sono 10 palline rosse e 4 bianche. Quante palline bianche devi aggiungere perché la probabilità di estrarre una pallina rossa sia la metà di quella di estrarre una pallina bianca?

Numero palline rosse = 10
Numero palline bianche = 4
x = numero di palline bianche da aggiungere
$14 + x$ = numero dei casi possibili
Il numero dei casi favorevoli all'estrazione di una pallina rossa resta invariato (10), mentre il numero dei casi favorevoli all'estrazione di una pallina bianca diventa $4 + x$:

$$P_{\text{rossa}} = \frac{10}{14+x} \qquad P_{\text{bianca}} = \frac{4+x}{14+x} \qquad P_{\text{rossa}} = \frac{1}{2} P_{\text{bianca}} \Rightarrow \frac{10}{14+x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4+x}{14+x}$$

Eliminiamo i denominatori moltiplicando entrambi i membri per $(14 + x)$, che è un'espressione diversa da zero:

$$10 = \frac{4+x}{2} \Rightarrow 20 = 4 + x \Rightarrow x = 16$$

16 è il numero di palline bianche da aggiungere.

15 Da un mazzo di carte da scala (13 carte per ciascun seme più due jolly) vengono tolti tutti gli assi, i fanti, le regine e i re. Determina la probabilità che una carta estratta a caso sia:

a un 7;
b un re;
c una carta maggiore di 7;
d una carta con un numero primo;
e una carta con un numero pari.

Un mazzo di carte da scala è formato da 54 carte.
Gli assi sono 4, i fanti 4, le regine 4 e i re 4, quindi le carte rimaste sono: 54 – 4 – 4 – 4 – 4 = 38.

a $P_7 = \frac{4}{38} = \frac{2}{19}$ perché i 7 sono 4.

b $P_{re} = \frac{0}{38} = 0$ perché i re sono stati tolti.

c $P_{>7} = \frac{12}{38} = \frac{6}{19}$ perché le carte maggiori di 7 sono gli 8, i 9 e i 10 di ciascun seme, quindi 12 carte.

d $P_{\text{primo}} = \frac{12}{38} = \frac{6}{19}$ perché i numeri primi presenti sono i 3, i 5, i 7 di ciascun seme, quindi 12 carte.

e $P_{\text{pari}} = \frac{20}{38} = \frac{10}{19}$ perché i numeri pari presenti sono i 2, i 4, i 6, gli 8 e i 10 di ciascun seme, quindi 20 carte.

16 In un'urna ci sono 10 palline nere, 8 blu, 6 rosse e 4 verdi. Calcola la probabilità che estraendo tre palline, senza rimetterle nell'urna, esse siano nell'ordine 1 nera, 1 blu e 1 rossa.

$$\left.\begin{array}{l} 10 = \text{numero palline nere} \\ 8 = \text{numero palline blu} \\ 6 = \text{numero palline rosse} \\ 4 = \text{numero palline verdi} \end{array}\right] 28 = \text{numero totale di palline}$$

Se le palline estratte non vengono rimesse nell'urna, alla prima estrazione i casi possibili sono 28, alla seconda estrazione i casi possibili sono 27 e alla terza estrazione sono 26. Si tratta di una probabilità composta di eventi dipendenti.

Briciole di teoria

- Due eventi A e B si dicono **indipendenti** se il verificarsi del primo non influenza la probabilità del verificarsi dell'altro. La **probabilità composta** di due eventi indipendenti, cioè la probabilità che si verifichino entrambi, è data da

$$P_{A \cap B} = P_A \cdot P_B$$

- Due eventi A e B si dicono **dipendenti** se il verificarsi del primo influenza la probabilità del verificarsi dell'altro. La **probabilità composta** di due eventi indipendenti, cioè la probabilità che si verifichino entrambi, è data da

$$P_{A \cap B} = P_A \cdot P(B|A)$$

dove $P(B|A)$ è la **probabilità** di B **condizionata** all'evento A.

La probabilità di una pallina nera alla prima estrazione è $P_N = \frac{10}{28}$;

la probabilità (condizionata) di una pallina blu alla seconda estrazione è $P_B = \frac{8}{27}$;

la probabilità (condizionata) di una pallina rossa alla terza estrazione è $P_R = \frac{6}{26}$.

Applicando la formula per il calcolo della probabilità composta otteniamo:

$P_{N,B,R} = P_N \cdot P_B \cdot P_R$, perciò si ha: $P_{N,B,R} = \frac{10}{28} \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{6}{26} = \frac{20}{819}$.

17 Un'urna contiene 10 palline gialle e 15 palline verdi.

a Si estrae una pallina gialla senza rimetterla nell'urna; qual è la probabilità che una seconda pallina estratta sia ancora gialla?

b Si estrae una pallina gialla e la si rimette nell'urna; qual è la probabilità che una seconda pallina estratta sia ancora gialla?

$$\left.\begin{array}{l} 10 = \text{numero palline gialle} \\ 15 = \text{numero palline verdi} \end{array}\right] 25 = \text{numero totale di palline}$$

a Se la prima pallina estratta è gialla e non la si rimette nell'urna abbiamo:
palline gialle rimaste = 9 (casi favorevoli)
palline totali presenti nell'urna = 24 (casi possibili)

$$P_G = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

b Se la prima pallina estratta è gialla e viene rimessa nell'urna abbiamo:
palline gialle presenti = 10 (casi favorevoli)
palline totali presenti nell'urna = 25 (casi possibili)

$$P_G = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

18 Estrai una pallina da un'urna che ne contiene 12 nere e 8 bianche; successivamente la rimetti nell'urna e poi ne estrai un'altra. Calcola la probabilità che:

a entrambe le palline siano nere;
b entrambe le palline siano bianche;
c la prima pallina sia bianca e la seconda sia nera;
d le due palline siano una nera e una bianca.

$$\left.\begin{array}{l} 112 = \text{numero palline nere} \\ 8 = \text{numero palline bianche} \end{array}\right] 20 = \text{numero totale di palline}$$

a $P_{\text{N, N}} = \frac{12}{20} \cdot \frac{12}{20} = \frac{9}{25}$

b $P_{\text{B, B}} = \frac{8}{20} \cdot \frac{8}{20} = \frac{4}{25}$

c $P_{\text{B, N}} = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{20} = \frac{6}{25}$

d $P_{\text{N, B o B, N}} = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{20} + \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{20} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$

19 Il daltonismo è una malattia ereditaria che comporta l'incapacità di distinguere certi colori. Il gene del daltonismo si trova sul cromosoma X, da cui dipende, come è noto, il sesso dell'individuo, e corrisponde a un carattere recessivo.
Calcola la probabilità che dall'unione tra un uomo sano e una donna daltonica nascano figli daltonici; illustra la situazione con una tabella a doppia entrata.

Le situazioni possibili sono:
XX = donna sana
X_dX = donna portatrice sana
X_dX_d = donna daltonica
XY = uomo sano
X_dY = uomo daltonico

Consideriamo quindi l'unione di un uomo sano (XY) e di una donna daltonica (X_dX_d), schematizzata nella tabella a fianco.

	X	Y
X_d	X_dX	X_dY
X_d	X_dX	X_dY

Su quattro casi possibili, vediamo che due corrispondono a figli daltonici (X_dY), quindi:

$$P_{\text{daltonici}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$$