Algebra

SEZ. 0

- I numeri relativi
- Il calcolo letterale
- Equazioni, disequazioni, problemi

I numeri relativi

1 **Rappresenta con un numero relativo le seguenti grandezze.**

a Altitudine di 400 m sul livello del mare.
b Terzo piano di un parcheggio sotterraneo.
c Perdita di peso di 15 kg.
d Incremento delle vendite del 10%.
e Prezzi calati del 3%.
f La battaglia di Canne è avvenuta nel 216 a.C.
g Mancano 5 secondi alla partenza di una gara.

I numeri relativi richiesti sono: **a** $+400$; **b** -3; **c** -15; **d** $+10$; **e** -3; **f** -216; **g** -5.

Briciole di teoria

- Si dice **relativo** un numero dotato di un segno.
- I numeri relativi **positivi** sono preceduti dal segno $+$.
  I numeri relativi **negativi** sono preceduti dal segno $-$.
  Lo zero non ha segno.
- L'insieme dei numeri relativi interi si indica con $\mathbb{Z}$, quello dei numeri relativi razionali con $\mathbb{Q}$, quello dei reali con $\mathbb{R}$.

2 **Scrivi il modulo dei seguenti numeri relativi.**

a -7 **b** $+\dfrac{28}{3}$ **c** $+36$ **d** $-0,\overline{34}$ **e** $-\sqrt{9}$ **f** $+1,6$

I numeri assoluti richiesti sono:
a 7; **b** $\dfrac{28}{3}$; **c** 36; **d** $0,\overline{34}$; **e** $\sqrt{9}$; **f** $1,6$.

Briciole di teoria

- Il **modulo** o **valore assoluto** di un numero relativo è il numero stesso privato del segno, cioè:

$$|+a| = a \qquad |-b| = b$$

3 **Scrivi i numeri relativi che hanno i seguenti valori assoluti.**

a 14 **b** $\dfrac{7}{9}$
c $\sqrt{15}$ **d** $1,7$

a $14 = |\pm 14|$; **b** $\dfrac{7}{9} = \left|\pm\dfrac{7}{9}\right|$; **c** $\sqrt{15} = |\pm\sqrt{15}|$; **d** $1,7 = |\pm 1,7|$

4 **Quali tra le seguenti coppie sono formate da numeri relativi concordi?**

a $+6, -1$
b $-3, -4$
c $+1, +0,5$

Due numeri relativi sono concordi se sono preceduti dallo stesso segno; le coppie di valori concordi sono dunque **b** e **c**, mentre i numeri della coppia **a** sono preceduti da segni diversi.

5 **Quali tra le seguenti coppie sono formate da numeri relativi discordi?**

a $+2, -1$
b $-7, -1,3$
c $-3, +8$

Due numeri relativi sono discordi se sono preceduti da segni diversi; le coppie di valori discordi sono dunque **a** e **c**, mentre i numeri della coppia **b** hanno lo stesso segno, e sono quindi concordi.

6 **Quali tra le seguenti coppie sono formate da numeri relativi opposti?**

a $-3, +2$

b $-5, +5$

c $+2, -\dfrac{1}{2}$

d $-4, +4$

Due numeri relativi si dicono opposti se sono discordi e hanno lo stesso valore assoluto; le coppie di valori opposti sono dunque **b** e **d**. Osserviamo che anche le coppie **a** e **c** sono formate da numeri discordi, ma i loro valori assoluti non coincidono.

7 **Confronta i numeri relativi delle seguenti coppie inserendo l'opportuno segno <, >, =.**

a -7 .... $+2$

b -5 .... -6

c $+2$ 0

d -42 .... $+42$

e -12 .... -3

f $+\dfrac{3}{4}$ .... $+\dfrac{7}{4}$

Briciole di teoria

Per confrontare due numeri relativi ricorda che:

- ogni numero positivo è maggiore di qualsiasi numero negativo
- dati due numeri positivi è maggiore quello che ha modulo maggiore
- dati due numeri negativi è maggiore quello che ha modulo minore
- lo zero è maggiore di ciascun numero negativo e minore di ciascun numero positivo

Se si rappresentano i numeri relativi su una retta orientata, i negativi stanno a sinistra dello zero e i positivi a destra; in tal modo si può dire che dati due numeri relativi il maggiore si trova sempre a destra del minore.

a $-7 < +2$ perché ogni numero negativo è minore di qualsiasi numero positivo.
b $-5 > -6$ perché essendo due numeri negativi, è maggiore quello con valore assoluto minore.
c $+2 > 0$ perché ogni numero positivo è maggiore di 0.
d $-42 < +42$ perché ogni numero negativo è minore di qualsiasi numero positivo.
e $-12 < -3$ perché essendo due numeri negativi, è minore quello con valore assoluto maggiore.
f $+\dfrac{3}{4} < +\dfrac{7}{4}$ perché essendo due numeri positivi, è minore quello con valore assoluto minore.

8 **Calcola le seguenti somme algebriche.**

a $+3 + 7 =$

b $-8 - 5 =$

c $-3 + 5 =$

d $+3 - 8 =$

e $+(-7) - (+4) + (-3) =$

Ricordiamo che la somma di due numeri relativi concordi è un numero relativo che ha per segno il segno dei numeri dati e per modulo la somma dei moduli. Quindi abbiamo:

a $+(3 + 7) = +10$

b $-(8 + 5) = -13$

Ricordiamo poi che la somma di due numeri relativi discordi è un numero relativo che ha il segno dell'addendo con il valore assoluto maggiore e per modulo la differenza dei moduli dei numeri, mentre la somma di due numeri relativi opposti è sempre zero. Quindi abbiamo:

c $5 > 3$, la somma cercata ha quindi il segno di $+5$:
$-3 + 5 = +(5 - 3) = +2$

d $8 > 3$, la somma cercata ha quindi il segno di -8:
$+3 - 8 = -(8 - 3) = -5$

e Ricordiamo che il segno $+$ davanti alla parentesi lascia i segni entro parentesi uguali, il segno $-$ fa cambiare tutti i segni dei numeri entro parentesi. Quindi abbiamo:
$= -7 - 4 - 3 = -14$

9 Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni.

a $(+12)\cdot(+2) =$
b $(-6)\cdot(-5) =$
c $(+4)\cdot(-9) =$
d $(-7)\cdot(+3) =$
e $(+10):(-2) =$
f $(+10):(+5) =$
g $(-14):(-2) =$
h $(-6):(+3) =$

Ricordiamo che il prodotto di due o più numeri relativi è uguale al numero relativo che ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti e per segno il $+$ se i due numeri sono concordi, il $-$ se sono discordi. Quindi abbiamo:

a $+(12\cdot 2) = +24$
b $+(6\cdot 5) = +30$
c $-(4\cdot 9) = -36$
d $-(7\cdot 3) = -21$

Ricordiamo inoltre che il quoziente di due numeri relativi è uguale al numero relativo che ha per valore assoluto il quoziente dei valori assoluti dei due numeri e per segno il $+$ se i due numeri sono concordi, il segno $-$ se sono discordi. Quindi abbiamo:

e $-(10:2) = -5$
f $+(10:5) = +2$
g $+(14:2) = +7$
h $-(6:3) = -2$

10 Esegui i seguenti elevamenti a potenza.

a $(+3)^2 =$
b $(-3)^2 =$
c $(+2)^3 =$
d $(-2)^3 =$
e $(+2)^{-2} =$
f $(-3)^{-2} =$
g $(-2)^{-3} =$

Ricordiamo che la potenza con esponente intero positivo di un numero relativo positivo è sempre positiva; la potenza di un numero relativo negativo è positiva se l'esponente è pari, è negativa se l'esponente è dispari. Il modulo della potenza è uguale alla potenza del modulo, quindi abbiamo:

a $(+3)^2 = +3^2 = +9$
b $(-3)^2 = +3^2 = +9$
c $(+2)^3 = +2^3 = +8$
d $(-2)^3 = -2^3 = -8$

Ricordiamo inoltre che la potenza che ha per esponente un numero negativo è uguale ad una frazione che ha per numeratore l'unità e per denominatore la potenza data ma con esponente positivo. Questo è equivalente a calcolare la potenza con esponente positivo e base uguale al reciproco della base data. Abbiamo quindi:

e $(+2)^{-2} = \left(+\dfrac{1}{2}\right)^2 = +\dfrac{1}{4}$

f $(-3)^{-2} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = +\dfrac{1}{9}$

g $(-2)^{-3} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 = -\dfrac{1}{8}$

11 Applica le proprietà delle potenze, quindi calcola la potenza.

a $(+2)^3\cdot(+2)^4:(+2)^5 =$
b $(-4)^5\cdot(-4)^2\cdot(-4):(-4)^9 =$
c $(-36)^2:(-4)^2 =$
d $\left\{\left[(-2)^2\right]^3\right\}^{-2} =$
e $(-5)^3:(-15)^3 =$
f $(-5)^4\cdot(+2)^4\cdot(-3)^4:(-15)^4 =$

Briciole di teoria

Ricordiamo le proprietà delle potenze:

$a^n\cdot a^m = a^{m+n}$ $\quad$ $a^n : a^m = a^{n-m}$

$a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n$ $\quad$ $a^n : b^n = (a:b)^n$

$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

Abbiamo:

a $(+2)^{3+4-5} = (+2)^2 = +4$

b $(-4)^{5+2+1-9} = (-4)^{-1} = -\dfrac{1}{4}$

c $[(-36):(-4)]^2 = (+9)^2 = +81$

d $(-2)^{2\cdot 3\cdot(-2)} = (-2)^{-12} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{12}$

e $[(-5):(-15)]^3 = \left(+\dfrac{1}{3}\right)^3 = +\dfrac{1}{27}$

f $\left[\dfrac{(-5)\cdot(+2)\cdot(-3)}{(-15)}\right]^4 = (-2)^4 = +16$

12 **Esegui le seguenti estrazioni di radice.**

a $\sqrt{+169} =$

b $\sqrt{+1024} =$

c $\sqrt[3]{64} =$

d $\sqrt[3]{-216} =$

Ricordiamo che la radice quadrata (cubica) è l'operazione inversa dell'elevamento al quadrato (al cubo). Abbiamo quindi:

a $\sqrt{+169} = \pm 13$ perché $(+13)^2 = 169$ e $(-13)^2 = 169$

b $\sqrt{+1024} = \pm 32$ perché $(+32)^2 = 1024$ e $(-32)^2 = 1024$

c $\sqrt[3]{64} = +4$ perché $(+4)^3 = 64$, ma $(-4)^3 = -64$

d $\sqrt[3]{-216} = -6$ perché $(-6)^3 = -216$, ma $(+6)^3 = +216$

Notiamo quindi che le radici di indice pari in generale hanno come risultato due valori opposti, mentre le radici di indice dispari hanno come risultato un unico valore concorde con il radicando.

Risolvi le seguenti espressioni.

13 $-1+\left\{\left[-\dfrac{1}{10}-\left(\dfrac{13}{4}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{5}\right)-\left(-\dfrac{1}{4}-\dfrac{6}{5}\right)\right]:\left(-\dfrac{4}{3}-\dfrac{25}{6}\right)\right\}\cdot\left(-\dfrac{11}{3}\right)=$

$$=-1+\left\{\left[-\frac{1}{10}-\left(\frac{65+30-8}{20}\right)-\left(\frac{-5-24}{20}\right)\right]:\left(\frac{-8-25}{6}\right)\right\}\cdot\left(-\frac{11}{3}\right)=$$

$$=-1+\left\{\left[-\frac{1}{10}-\frac{87}{20}+\frac{29}{20}\right]:\left(-\frac{33}{6}\right)\right\}\cdot\left(-\frac{11}{3}\right)=$$

$$=-1+\left\{\left[\frac{-2-87+29}{20}\right]\cdot\left(-\frac{2}{11}\right)\right\}\cdot\left(-\frac{11}{3}\right)=$$

$$=-1+\left\{-\frac{60}{20}\cdot\left(-\frac{2}{11}\right)\right\}\cdot\left(-\frac{11}{3}\right)=$$

$$=-1+\left\{+\frac{6}{11}\right\}\cdot\left(-\frac{11}{3}\right)=$$

$$=-1-2=-3$$

14
$$\frac{-4\cdot\left\{\left[-\frac{27}{16}:\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{8}\right)-\frac{25}{24}\right]:\frac{22}{15}\right\}}{\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{7}{12}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{-4\cdot\left\{\left[-\frac{27}{16}:\left(\frac{-12+3}{8}\right)-\frac{25}{24}\right]:\frac{22}{15}\right\}}{\left(\frac{3-8-7}{12}\right):\left(\frac{2-3}{4}\right)+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{-4\cdot\left\{\left[-\frac{27}{16}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)-\frac{25}{24}\right]:\frac{22}{15}\right\}}{-1\cdot(-4)+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{-4\cdot\left\{\left[+\frac{3}{2}-\frac{25}{24}\right]:\frac{22}{15}\right\}}{+4+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{-4\cdot\left\{\left[\frac{36-25}{24}\right]\cdot\frac{15}{22}\right\}}{\frac{16+3}{4}}=$$

$$=\frac{-4\cdot\left\{\frac{11}{24}\cdot\frac{15}{22}\right\}}{\frac{19}{4}}=$$

$$=-4\cdot\frac{5}{16}\cdot\frac{4}{19}=-\frac{5}{19}$$

Applicando le proprietà delle potenze, risolvi le seguenti espressioni.

15
$$\left[\left(+\frac{5}{2}\right)^3:\left(-\frac{25}{6}\right)^3\right]^2:\left(-\frac{3}{10}\right)^6=$$

$$=\left[\left(+\frac{5}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{6}{25}\right)^3\right]^2:\left(-\frac{3}{10}\right)^6=$$

$$=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^3\right]^2\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)^6=$$

$$=\left(-\frac{3}{5}\right)^6\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)^6=$$

$$=(+2)^6=+64$$

16 $\left(+\frac{7}{3}\right)^2:(+14)^2:\left(-\frac{5}{2}\right)^2=$

$$=\left[\left(+\frac{7}{3}\right):(+14):\left(-\frac{5}{2}\right)\right]^2=$$

$$=\left[\left(+\frac{7}{3}\right)\cdot\left(+\frac{1}{14}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right]^2=\left(-\frac{1}{15}\right)^2=+\frac{1}{225}$$

17 $\left(-\frac{3}{10}\right)^{-1}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)^{-1}:(-6)^{-1}:\left(-\frac{3}{8}\right)^{-1}=$

$$=\left(-\frac{10}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right):\left(-\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{8}{3}\right)=$$

$$=\frac{8}{3}\cdot(-6)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=+6$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

18 $(-2)^2\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)^2:\left(-\frac{2}{3}\right)^3-\left(-\frac{11}{3}+\frac{19}{6}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5=$

$$=(-2)^2\cdot\left(\frac{9-10}{12}\right)^2:\left(-\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{-22+19}{6}\right)^4+\frac{1}{32}=$$

$$=\left[-2\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)\right]^2:\left(-\frac{8}{27}\right)-\left(-\frac{3}{6}\right)^4+\frac{1}{32}=$$

$$=\left[+\frac{1}{6}\right]^2:\left(-\frac{8}{27}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{32}=$$

$$=+\frac{1}{36}\cdot\left(-\frac{27}{8}\right)-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=$$

$$=-\frac{3}{32}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=$$

$$=\frac{-3-2+1}{32}=-\frac{4}{32}=-\frac{1}{8}$$

19 $\left(-\frac{7}{5}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{4}+1-\frac{7}{5}\right)+(-3+5)^{-2}=$

$$=-\frac{5}{7}\cdot\left(\frac{15+20-28}{20}\right)+(+2)^{-2}=$$

$$=-\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{20}+\frac{1}{4}=$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$$

20 $\left(\frac{3}{2}-1\right)^{-2}:\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}-\left(1-\frac{5}{3}\right):\left(1-\frac{4}{3}\right)^{-1}=$

$$=\left(\frac{3-2}{2}\right)^{-2}:\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{3-5}{3}\right):\left(\frac{3-4}{3}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}:\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}-\left(-\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}=$$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right]^{-2}-\left(-\frac{2}{3}\right):(-3)=$$

$$=\left[-\frac{3}{4}\right]^{-2}-\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\left[-\frac{4}{3}\right]^{2}-\frac{2}{9}=+\frac{16}{9}-\frac{2}{9}=+\frac{14}{9}$$

21 $\dfrac{\left(-3-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right):\left(-2-\frac{2}{5}\right)}{\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}\right]\cdot(-3)^{2}}\cdot\dfrac{\left(\frac{-5^{2}}{(-5)^{2}}-\frac{1}{(-3)^{2}}\right):(-5)^{2}\cdot 3}{\left(-\frac{5}{3}\right)^{2}:\left[(-5)^{2}\cdot 3\right]}\cdot\dfrac{5}{17}=$

$$=\frac{\left(\frac{-12-3-2}{4}\right):\left(\frac{-10-2}{5}\right)}{\left[\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right]\cdot 9}\cdot\frac{\left(\frac{-25}{25}-\frac{1}{9}\right):25\cdot 3}{\frac{25}{9}:\left[25\cdot 3\right]}\cdot\frac{5}{17}=$$

$$=\frac{-\frac{17}{4}\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)}{\left[\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right]\cdot 9}\cdot\frac{\left(-1-\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{1}{25}\cdot 3}{\frac{25}{9}\cdot\frac{1}{75}}\cdot\frac{5}{17}=$$

$$=\frac{+\frac{85}{48}}{\left[\frac{4-9}{36}\right]\cdot 9}\cdot\frac{\left(\frac{-9-1}{9}\right)\cdot\frac{1}{25}\cdot 3}{\frac{1}{27}}\cdot\frac{5}{17}=$$

$$=\frac{+\frac{85}{48}}{-\frac{5}{36}\cdot 9}\cdot\frac{-\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{25}\cdot 3}{\frac{1}{27}}\cdot\frac{5}{17}=$$

$$=\frac{+\frac{85}{48}}{-\frac{5}{4}}\cdot\frac{-\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{25}\cdot 3}{\frac{1}{27}}\cdot\frac{5}{17}=$$

$$=+\frac{85}{48}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{25}\cdot 3\right)\cdot 27\cdot\frac{5}{17}=$$

$$=-\frac{17}{12}\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)\cdot 27\cdot\frac{5}{17}=+\frac{3}{2}$$

Il calcolo letterale

22 **Tra le seguenti espressioni letterali, quali sono monomi?**

a $2a^4 - 5b$

b $\frac{3}{5}xy^2$

c $-\frac{9}{7}a^4b^{-2}c^{-1}$

d $5x \cdot (y^3 - z)$

e $7a^2 - \frac{1}{3}b^2c$

f $\frac{a^4b^2}{2abc}$

Briciole di teoria

- Si dice **monomio** una espressione algebrica in cui non figurano addizioni e sottrazioni.
- Un monomio si dice ridotto a **forma normale** se si presenta come prodotto di un solo fattore numerico e di potenze letterali aventi basi diverse.
- Si dice **intero** un monomio in cui non compaiono lettere al denominatore oppure lettere con esponente negativo.
- Si dice **frazionario** un monomio in cui compaiono lettere al denominatore oppure lettere con esponente negativo.
- Due monomi ridotti a forma normale sono **uguali** se hanno lo stesso coefficiente numerico e la stessa parte letterale.
- Due monomi ridotti a forma normale sono **simili** se hanno la stessa parte letterale.
- Due monomi ridotti a forma normale sono **opposti** se sono simili e hanno i coefficienti numerici opposti.

a non è un monomio, poiché vi figura un'addizione; **b** è un monomio intero; **c** è un monomio frazionario; **d** non è un monomio perché vi figura una sottrazione; **e** non è un monomio, poiché vi figura una sottrazione; **f** è un monomio frazionario.

23 **Trasforma la seguente espressione letterale in un monomio ridotto a forma normale.**

$$-4xy^3z \cdot (-2y^2z^3) \cdot \frac{1}{16}x^4y$$

Applicando la proprietà commutativa del prodotto l'espressione diventa: $(-4) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{16} \cdot x \cdot x^4 \cdot y^3 \cdot y^2 \cdot y \cdot z \cdot z^3$

Applicando la proprietà associativa e la proprietà delle potenze otteniamo: $\frac{1}{2}x^{1+4}y^{3+2+1}z^{1+3} = \frac{1}{2}x^5y^6z^4$.

24 **Calcola le seguenti somme di monomi.**

a $-6a^4b^3 + 8a^4b^3 =$

b $x^3y^3 - 4x^3y =$

c $-9xy^2 + 9xy^2 =$

d $-11a^3 + 5b^2 + 10a^3 =$

e $-\frac{7}{8}x^2y^3 + \frac{3}{4}x^2y^3 + x^2y^3 =$

Briciole di teoria

La **somma** di due o più monomi simili è un monomio simile a quelli dati, che ha per coefficiente numerico la somma algebrica dei coefficienti.

a I monomi hanno la stessa parte letterale, cioè a^4b^3, e pertanto sono simili, quindi la loro somma è: $(-6+8)a^4b^3 = +2a^4b^3$.

b I monomi non sono simili, quindi la loro somma non è un monomio.

c I due monomi hanno la stessa parte letterale e coefficienti opposti, quindi sono monomi opposti. La loro somma è uguale a 0.

d Tra gli addendi riconosciamo due monomi simili, e quindi sommabili, che sono $-11a^3$ e $+10a^3$, la cui somma è $-a^3$; allora il risultato è $-a^3 + 5b^2$.

e I tre monomi sono tutti simili, con parte letterale uguale a x^2y^3; i coefficienti numerici sono frazioni, quindi abbiamo $\left(-\frac{7}{8} + \frac{3}{4} + 1\right)x^2y^3 = \frac{-7+6+8}{8}x^2y^3 = +\frac{7}{8}x^2y^3$.

25 **Calcola i seguenti prodotti di monomi.**

a $a^3 \cdot a =$

b $+2x^3y \cdot (-5x^2y^2z) =$

c $-\frac{1}{6}a^2b^3c \cdot (-6abc^3) =$

d $x^2y^4 \cdot \left(-\frac{5}{4}x\right) =$

e $5xy^2 \cdot (-y^3) \cdot 3x^2y =$

f $-\frac{2}{9}ab^2 \cdot (-6a^2b) \cdot (-a^3b^3) =$

g $8ac \cdot \left(-\frac{3}{4}a^4b^2\right)\left(-\frac{1}{2}a^2b\right) =$

Applichiamo la proprietà del prodotto di potenze di ugual base e otteniamo:

a $a^{3+1} = a^4$

b $-10x^{3+2} \cdot y^{1+2} \cdot z = -10x^5y^3z$

c $+1a^{2+1} \cdot b^{3+1} \cdot c^{1+3} = a^3b^4c^4$

d $-\frac{5}{4}x^{2+1}y^4 = -\frac{5}{4}x^3y^4$

e $-15x^{1+2}y^{2+3+1} = -15x^3y^6$

f $-\frac{2}{9} \cdot (-6) \cdot (-1) \cdot a^{1+2+3}b^{2+1+3} = -\frac{4}{3}a^6b^6$

g $8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot a^{1+4+2} \cdot b^{2+1}c = +3a^7b^3c$

Briciole di teoria

Il **prodotto** di due o più monomi è un monomio che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto dei fattori letterali.

26 **Calcola i seguenti quozienti tra monomi.**

a $18a^6b^3c^2 : (-3a^3bc) =$

b $-ab^2c^4 : abc =$

c $-12a^3b^3c : (-4a^3b^3) =$

d $11x^5y^3 : (-2x^4) =$

e $xy^2z^4 : \left(-\frac{2}{9}yz^4\right) =$

f $-8a^5b^3c^2 : (-4a^5b^3c^2) =$

Applichiamo la proprietà del quoziente di potenze di ugual base e otteniamo:

a $-6a^{6-3}b^{3-1}c^{2-1} = -6a^3b^2c$

b $-a^{1-1}b^{2-1}c^{4-1} = -a^0bc^3 = -bc^3$ (ricorda che qualunque base elevata a 0 dà come risultato 1).

c $+3a^{3-3}b^{3-3}c = +3c$

d $-\frac{11}{2}x^{5-4}y^3 = -\frac{11}{2}xy^3$

e $1 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right)xy^{2-1}z^{4-4} = -\frac{9}{2}xy$

f $(-8) : (-4)a^{5-5}b^{3-3}c^{2-2} = +2$

Briciole di teoria

Il **quoziente** tra due monomi è, in generale, un monomio frazionario in cui il coefficiente è uguale al quoziente dei coefficienti dei monomi e la parte letterale è formata da tutti i fattori letterali ottenuti dalla divisione delle parti letterali dei monomi stessi.

27 **Calcola le seguenti potenze di monomi.**

a $(-a^2b^4c)^3 =$

b $(xy^3)^4 =$

a Applichiamo la proprietà della potenza di potenza e otteniamo:
$(-1)^3a^{2\cdot 3}b^{4\cdot 3}c^{1\cdot 3} = -a^6b^{12}c^3$

b Applichiamo la proprietà della potenza di potenza e otteniamo:
$x^{1\cdot 4}y^{3\cdot 4} = x^4y^{12}$

Briciole di teoria

Per elevare a **potenza *n*-esima** un monomio si eleva a potenza il coefficiente e si moltiplicano per n gli esponenti dei fattori letterali.

c $(-7ab^5c^4)^2 =$

c Applichiamo la proprietà della potenza di potenza e otteniamo:
$(-7)^{1\cdot 2}a^{1\cdot 2}b^{5\cdot 2}c^{4\cdot 2} = +49a^2b^{10}c^8$

d $\left(\frac{5}{2}x^2y^2z^3\right)^3 =$

d Applichiamo la proprietà della potenza di potenza e otteniamo:
$\left(\frac{5}{2}\right)^{1\cdot 3}x^{2\cdot 3}y^{2\cdot 3}z^{3\cdot 3} = \frac{125}{8}x^6y^6z^9$

Calcola il valore delle seguenti espressioni con i monomi.

28 $-48x^5y^5 : (-6x^2y) : (-4xy) + 6x^2y^3 + (-39x^4y^4) : (+13x^2y) =$

$$= +8x^3y^4 : (-4xy) + 6x^2y^3 + (-3x^2y^3) =$$
$$= -2x^2y^3 + 6x^2y^3 - 3x^2y^3 = x^2y^3$$

29 $\left[-x^3 - 10x^4y^2 : (+5xy^2)\right] : (-3x) + (-2x^2y^2)^3 : (-2x^2y^3)^2 =$

$$= \left[-x^3 - 2x^3\right] : (-3x) - 8x^6y^6 : 4x^4y^6 =$$
$$= -3x^3 : (-3x) - 2x^2 =$$
$$= +x^2 - 2x^2 = -x^2$$

30 $-\frac{3}{5}x^3y^3 + \left(-\frac{18}{7}xy^3\right)\cdot\left(-\frac{7}{9}x^2\right) + \left[\frac{2}{5}x^3y^3 - \left(-\frac{2}{3}x^4y^5\right) : \left(-\frac{5}{6}xy^2\right)\right] =$

$$= -\frac{3}{5}x^3y^3 + 2x^3y^3 + \left[\frac{2}{5}x^3y^3 - \frac{4}{5}x^3y^3\right] =$$
$$= -\frac{3}{5}x^3y^3 + 2x^3y^3 + \left[-\frac{2}{5}x^3y^3\right] =$$
$$= -\frac{3}{5}x^3y^3 + 2x^3y^3 - \frac{2}{5}x^3y^3 =$$
$$= \frac{-3+10-2}{5}x^3y^3 = \frac{5}{5}x^3y^3 = x^3y^3$$

31 $-6a^2b^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}ab^2 + \frac{5}{6}ab^2\right)^2 : \left[-\frac{3}{4}a^2b^4 \cdot \left(\frac{2}{3}a^2b^2 - \frac{1}{6}a^2b^2\right)\right] =$

$$= -6a^2b^2 \cdot \left(\frac{-4+5}{6}ab^2\right)^2 : \left[-\frac{3}{4}a^2b^4 \cdot \left(\frac{+4-1}{6}a^2b^2\right)\right] =$$
$$= -6a^2b^2 \cdot \left(\frac{1}{6}ab^2\right)^2 : \left[-\frac{3}{4}a^2b^4 \cdot \left(\frac{3}{6}a^2b^2\right)\right] =$$
$$= -6a^2b^2 \cdot \frac{1}{36}a^2b^4 : \left[-\frac{3}{8}a^4b^6\right] =$$
$$= -6 \cdot \frac{1}{36}\left(-\frac{8}{3}\right)a^{2+2-4}b^{2+4-6} = +\frac{4}{9}$$

32 **Tra le seguenti espressioni indica i polinomi e i monomi.**

a $2x + x^2$

b $-3ab + 5ab$

c $\frac{1}{2}x^2 + 5x^2 + 1$

d $3a^2b \cdot (-5ab^2)$

a Osserviamo che i termini sono monomi non simili tra loro, quindi la loro somma non è un monomio, ma è un polinomio.
b In questo caso i termini sono monomi simili tra loro, per cui la loro somma è un monomio simile agli addendi.
c Due termini sono monomi non simili tra loro e la loro somma è un monomio, il terzo termine però non è simile ad essi, quindi la somma è un polinomio.
d In questo caso non sono presenti né addizioni né sottrazioni, quindi l'espressione è senz'altro un monomio.

Briciole di teoria

- Si chiama **polinomio** razionale intero la somma di due o più monomi razionali interi; gli addendi di tale somma sono i termini del polinomio.
- Un polinomio si dice **binomio** se è formato da due termini, **trinomio** se è formato da tre termini e **quadrinomio** se è formato da quattro termini.

Calcola le seguenti somme di polinomi.

33 $(5a^5 - 3a^3b + 4ab^3) + (a^3b - 6a^5 + 2a^4) - (4ab^3 - a^5) =$

Eliminiamo le parentesi e cambiamo i segni se il segno davanti parentesi è un meno:

$= 5a^5 - 3a^3b + 4ab^3 + a^3b - 6a^5 + 2a^4 - 4ab^3 + a^5 =$

Sommiamo i termini simili: $5a^5 - 6a^5 + a^5 = 0$

$-3a^3b + a^3b = -2a^3b$

$+4ab^3 - 4ab^3 = 0$

$+2a^4$

Il risultato è $2a^4 - 2a^3b$.

Briciole di teoria

Nella **somma algebrica** di polinomi è sufficiente sommare i termini simili: il risultato può essere un polinomio, un monomio o un numero reale.

34 $[5b^5 - (-8a^3b + 8ab^2) + 2a^5] - \{[(3a^3b - 6ab^2) + 5b^5 + 9a^3b] - 2ab^2\} =$

$$= [5b^5 + 8a^3b - 8ab^2 + 2a^5] - \{[3a^3b - 6ab^2 + 5b^5 + 9a^3b] - 2ab^2\} =$$

$$= 5b^5 + 8a^3b - 8ab^2 + 2a^5 - \{3a^3b - 6ab^2 + 5b^5 + 9a^3b - 2ab^2\} =$$

$$= \cancel{5b^5} + \underline{8a^3b} - \cancel{8ab^2} + 2a^5 \underline{- 3a^3b} + \cancel{6ab^2} - \cancel{5b^5} \underline{- 9a^3b} + \cancel{2ab^2} = -4a^3b + 2a^5$$

35 $a^2b - \left\{\frac{7}{9}a^2 - \left[-a^2b - \frac{1}{3}a^2b + \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{3}a^2b\right] - \frac{2}{3}a^2\right\} =$

$$= a^2b - \left\{\frac{7}{9}a^2 + a^2b + \cancel{\frac{1}{3}a^2b} - \frac{1}{9}a^2 - \cancel{\frac{1}{3}a^2b} - \frac{2}{3}a^2\right\} =$$

$$= a^2b - \frac{7}{9}a^2 - a^2b + \frac{1}{9}a^2 + \frac{2}{3}a^2 = 0$$

Calcola i seguenti prodotti di polinomi.

36 $(x^3+2x^2-x)\cdot(-x)=$

Applichiamo la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma e otteniamo:

$$(x^3+2x^2-x)\cdot(-x)=-x^4-2x^3+x^2$$

Briciole di teoria

- Il **prodotto di un polinomio per un monomio** è il polinomio i cui termini si ottengono moltiplicando ciascun termine del polinomio per il monomio.
- Il **prodotto di due polinomi** è uguale al polinomio i cui termini si ottengono moltiplicando ciascun termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo.

37 $3a^3\cdot(2a^2b+ab^2-4b^3)=$

Applichiamo la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma e otteniamo:

$$3a^3\cdot(2a^2b+ab^2-4b^3)=6a^5b+3a^4b^2-12a^3b^3$$

38 $(2x+3y)(x-2y)=$

Applichiamo la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma e otteniamo:

$$(2x+3y)(x-2y)=2x^2-4xy+3xy-6y^2=2x^2-xy-6y^2$$

39 $(x+y+1)(-2x+3y-2)=$

Applichiamo la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma e otteniamo:

$$(x+y+1)(-2x+3y-2)=-2x^2+3xy-2x-2xy+3y^2-2y-2x+3y-2=$$

$$=-2x^2+xy-4x+3y^2+y-2$$

Esegui le seguenti divisioni di un polinomio per un monomio.

40 $(15x^4-18x^2+3x):(-3x)=$

Applichiamo la proprietà distributiva della divisione rispetto alla somma e otteniamo:

$$(15x^4-18x^2+3x):(-3x)=-5x^3+6x-1$$

Briciole di teoria

Nella **divisione di un polinomio per un monomio** è necessario che tutti i termini del polinomio siano divisibili per il monomio. In questo caso il quoziente è uguale al polinomio i cui termini si ottengono dividendo ciascun termine del polinomio dato per il monomio.

41 $\left(\frac{2}{5}ab^2+\frac{3}{10}a^2b^3-\frac{7}{5}a^3b^3\right):\left(-\frac{1}{5}ab^2\right)=$

Applichiamo la proprietà distributiva della divisione rispetto alla somma e otteniamo:

$$\left(\frac{2}{5}ab^2+\frac{3}{10}a^2b^3-\frac{7}{5}a^3b^3\right):\left(-\frac{1}{5}ab^2\right)=-2-\frac{3}{2}ab+7a^2b$$

42 **Calcola i seguenti prodotti notevoli.**

a $(2x-y)^2=$

b $(-a+3b)^2=$

c $(-x^2-3y)^2=$

d $(3a+2b)^2=$

a $=(2x)^2+(y)^2-2(2x)(y)=4x^2+y^2-4xy$

b $=(-a)^2+(3b)^2+2(-a)(3b)=a^2+9b^2-6ab$

c $=(-x^2)^2+(-3y)^2+2(-x^2)(-3y)=x^4+9y^2+6x^2y$

d $=(3a)^2+(2b)^2+2(3a)(2b)=9a^2+4b^2+12ab$

Briciole di teoria

I prodotti notevoli possono essere schematizzati così:

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

$(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

$(a-b)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

43 **Calcola i seguenti prodotti notevoli.**

a $(2x-y)(2x+y)=$

b $\left(\frac{1}{4}+3b^2\right)\left(\frac{1}{4}-3b^2\right)=$

c $(2x+3y)(-3y+2x)=$

d $(a^2-b^2)(a^2+b^2)=$

a $=(2x)^2-(y)^2=4x^2-y^2$

b $=\left(\frac{1}{4}\right)^2-(3b^2)^2=\frac{1}{16}-9b^4$

c $=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$

d $=(a^2)^2-(b^2)^2=a^4-b^4$

44 **Calcola i seguenti prodotti notevoli.**

a $(2x+3y)^3=$

b $\left(\frac{1}{2}a-4b^2\right)^3=$

a $=(2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(+3y)^2+(+3y)^3=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

b $=\left(\frac{1}{2}a\right)^3+3\left(\frac{1}{2}a\right)^2(-4b^2)+3\left(\frac{1}{2}a\right)(-4b^2)^2+(-4b^2)^3=$

$=\frac{1}{8}a^3+3\cdot\frac{1}{4}a^2\cdot(-4b^2)+3\cdot\frac{1}{2}a\cdot16b^4-64b^6=$

$=\frac{1}{8}a^3-3a^2b^2+24ab^4-64b^6$

Risolvi le seguenti espressioni.

45 $3ab\cdot\{b\cdot(-a+3b)-[3b\cdot(2a+b)-2a\cdot(4a+3b)-a\cdot(b-4a)]\}=$

$$=3ab\cdot\{-ab+3b^2-[\cancel{6ab}+3b^2-8a^2-\cancel{6ab}-ab+4a^2]\}=$$
$$=3ab\cdot\{\cancel{-ab}+\cancel{3b^2}-\cancel{3b^2}+8a^2+\cancel{ab}-4a^2\}=$$
$$=3ab\cdot\{+4a^2\}=12a^3b$$

46 $(a+b)\cdot(a-b)\cdot(a^2+b^2)-(a^2+b^2)^2+2b^2\cdot(b^2+a^2)=$

$$=(a^2-b^2)\cdot(a^2+b^2)-(a^4+b^4+2a^2b^2)+2b^4+2a^2b^2=$$
$$=\cancel{a^4}-\cancel{b^4}-\cancel{a^4}-\cancel{b^4}-\cancel{2a^2b^2}+\cancel{2b^4}+\cancel{2a^2b^2}=0$$

47 $-2\cdot(x+2y)^2+2\cdot(x+y)\cdot(x-y)+(2x+2y)^2=$

$$=-2\cdot(x^2+4y^2+4xy)+2\cdot(x^2-y^2)+4x^2+4y^2+8xy=$$
$$=\cancel{-2x^2}\underline{-8y^2}-\cancel{8xy}+\cancel{2x^2}\underline{-2y^2}+4x^2\underline{+4y^2}+\cancel{8xy}=+4x^2-6y^2$$

48 $\left(\frac{1}{3}ab+3ac\right)^2-\left(\frac{1}{3}ab+2ac\right)^2-ac\cdot\left(\frac{2}{3}ab-ac\right)=$

$$=\frac{1}{9}a^2b^2+9a^2c^2+2a^2bc-\left(\frac{1}{9}a^2b^2+4a^2c^2+\frac{4}{3}a^2bc\right)-\frac{2}{3}a^2bc+a^2c^2=$$
$$=\cancel{\frac{1}{9}a^2b^2}+9a^2c^2+\cancel{2a^2bc}-\cancel{\frac{1}{9}a^2b^2}-4a^2c^2-\cancel{\frac{4}{3}a^2bc}-\cancel{\frac{2}{3}a^2bc}+a^2c^2=6a^2c^2$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni letterali attribuendo alle lettere i valori indicati.

49 $2ab-(2a+b)-a(2b-a)$ $\qquad a=3;\ b=-6$

Sostituiamo il valore $+3$ alla lettera a e il valore -6 alla lettera b:

$$2\cdot(+3)\cdot(-6)-\left[2\cdot(+3)+(-6)\right]-3\cdot\left[2(-6)-(+3)\right]=$$
$$=-36-[6-6]-3\cdot[-12-3]=$$
$$=-36-3\cdot[-15]=$$
$$=-36+45=+9$$

50 $\dfrac{a-b+c}{2a+bc+b}$ $\qquad a=-2;\ b=+3;\ c=0$

Sostituiamo il valore -2 alla lettera a, il valore $+3$ alla lettera b e il valore 0 alla lettera c:

$$=\frac{-2-(+3)+0}{2(-2)+(+3)(0)+(+3)}=\frac{-2-3}{-4+3}=\frac{-5}{-1}=5$$

Calcola il valore che assume il polinomio dato per i valori delle variabili indicati.

51 $P(x) = 2x + 3$

a $x = 0$	**a** $P(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$
b $x = -\dfrac{1}{2}$	**b** $P\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 3 = -1 + 3 = +2$

52 $P(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$

a $x = -1; y = -1$	**a** $P(-1, -1) = (-1)^2 - 2(-1)(-1) + (-1)^2 = 1 - 2 + 1 = 0$
b $x = 3; y = -1$	**b** $P(3, -1) = (3)^2 - 2(3)(-1) + (-1)^2 = 9 + 6 + 1 = 16$

Equazioni, disequazioni, problemi

Briciole di teoria

- Si dice **identità** un'uguaglianza tra due espressioni letterali che è verificata per qualunque valore attribuito alla lettera che vi figura.
- Si dice **equazione** un'uguaglianza tra due espressioni letterali, dette **membri** dell'equazione, che è verificata solo per particolari valori attribuiti alla lettera che vi figura, detta **incognita**.
- Le **radici** o soluzioni di un'equazione sono i valori che, sostituiti all'incognita, rendono vera l'uguaglianza.
- Si dice **grado** di un'equazione il valore massimo che compare come esponente dell'incognita dell'equazione stessa. Un'equazione si dice di primo grado se in essa l'incognita figura solo con esponente uguale a 1.
- Un'equazione **determinata** ammette al massimo un numero di soluzioni pari al grado dell'equazione stessa: un'equazione di primo grado ammette al massimo una soluzione; un'equazione di secondo grado ammette al massimo due soluzioni, ecc.

Risolvi le seguenti equazioni.

53 $2(x - 3) - 5(1 + x) - 1 = x + 2(1 - x)$

Eseguiamo i calcoli:
$2x - 6 - 5 - 5x - 1 = x + 2 - 2x$
Applichiamo la regola del trasporto per portare tutti i termini contenenti l'incognita a primo membro e i termini noti a secondo membro:
$2x - 5x - x + 2x = 6 + 5 + 1 + 2$
$-2x = 14$
Applichiamo il secondo principio di equivalenza dividendo entrambi i membri dell'equazione per -2:
$$\frac{-2x}{-2} = \frac{14}{-2}$$
$x = -7$
L'equazione è determinata e $x = -7$ è la sua unica radice.

Briciole di teoria

1° principio: aggiungendo a entrambi i membri di un'equazione una stessa espressione algebrica, contenente o no l'incognita, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.
2° principio: moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero diverso da zero si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Dai due principi seguono alcune regole pratiche.
- **Regola di cancellazione**: se uno stesso termine figura nei due membri di un'equazione, esso può essere cancellato.
- **Regola del trasporto**: si può sempre trasportare un termine di un'equazione da un membro all'altro purché lo si cambi di segno.

54 $5 - [-(x-1) - 5(2x-1)] = 2 + x + 5(2x-3)$

Eseguiamo i calcoli:
$5 - [-x + 1 - 10x + 5] = 2 + x + 10x - 15$
Applichiamo la regola del trasporto:
$x + 10x - x - 10x = 2 - 15 + 1$
$0x = -12$
L'equazione è impossibile perché nessun numero moltiplicato per 0 dà come risultato -12.

55 $(x-2)(x+2) - \dfrac{x-4}{2} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 2$

Eseguiamo i calcoli:
$$x^2 - 4 - \frac{x-4}{2} = x^2 + \frac{1}{4} - x - 2$$
Riduciamo allo stesso denominatore che è il m.c.m. di 2 e 4, cioè 4:
$$\frac{4x^2 - 16 - 2x + 8}{4} = \frac{4x^2 + 1 - 4x - 8}{4}$$
Applichiamo il secondo principio di equivalenza e moltiplichiamo per 4 entrambi i membri, eliminando in questo modo i denominatori:
$4x^2 - 2x - 8 = 4x^2 - 4x - 7$
Applichiamo la regola del trasporto per portare tutti i termini contenenti l'incognita a primo membro e i termini noti a secondo membro:
$4x^2 - 2x - 4x^2 + 4x = +8 - 7$
$2x = 1$
L'equazione è determinata e $x = \dfrac{1}{2}$ è la sua unica radice.

56 $\dfrac{7x-5}{10} + \dfrac{x+4}{3} - \dfrac{5x+1}{6} = \dfrac{3x+10}{15}$

Eliminiamo i denominatori:
$$\frac{3(7x-5) + 10(x+4)(5x+1)}{30} = \frac{2(3x+10)}{30}$$
$21x - 15 + 10x + 40 - 25x - 5 = 6x + 20$
$21x + 10x - 25x - 6x = 20 + 15 - 40 + 5$
$0x = 0$
L'equazione è indeterminata perché l'uguaglianza è verificata per qualunque valore attribuito alla x.

57 $\dfrac{3-2x}{2} + \dfrac{2x+2}{3} = \dfrac{10-3x}{3} + \dfrac{13}{6}$

$$\frac{3(3-2x) + 2(2x+2)}{6} = \frac{2(10-3x) + 13}{6}$$
$$9 - \cancel{6x} + 4x + 4 = 20 - \cancel{6x} + 13$$
$+4x = 20 + 13 - 9 - 4$
$4x = 20$
L'equazione è determinata e $x = \dfrac{20}{4} = 5$ è la sua unica radice.

Risolvi le seguenti disequazioni e rappresenta graficamente l'intervallo delle soluzioni.

58 $5x + 2 - (3x + 5) < 4x + 7$

$5x + 2 - 3x - 5 < 4x + 7$
Applichiamo la regola del trasporto:

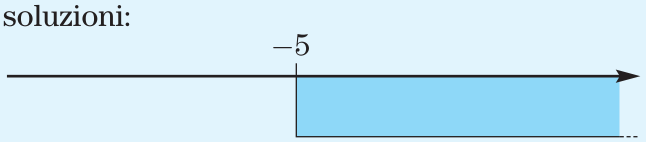
$5x - 3x - 4x = -2 + 5 + 7$

$-2x < 10$

Dividiamo entrambi i membri per -2 e cambiamo il verso della disequazione:

$x > \frac{10}{-2}$ $\qquad x > -5$

Rappresentiamo graficamente l'intervallo delle soluzioni:



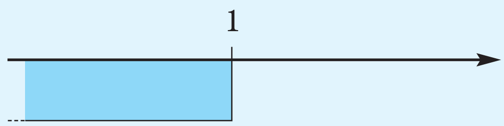
Briciole di teoria

- Si dice **disequazione** una disuguaglianza del tipo $M < N$ o $M > N$ dove M ed N sono due espressioni letterali.
- Per risolvere una **disequazione razionale intera** si seguono le stesse procedure viste per le equazioni e poi si determinano gli intervalli delle soluzioni, ricordando che se si moltiplicano o dividono entrambi i membri per una stessa quantità negativa la disequazione cambia di verso.
- Due disequazioni si dicono **equivalenti** se hanno gli stessi intervalli delle soluzioni.

59 $(2x - 1)^2 > (2x + 1)^2 - 8$

$\cancel{4x^2} - 4x \cancel{+1} > \cancel{4x^2} + 4x \cancel{+1} - 8$

Applichiamo la regola del trasporto:
$-4x - 4x > -8$
$-8x > -8$
$8x < 8$
Applichiamo il secondo principio di equivalenza e dividiamo entrambi i membri per 8:
$x < 1$



60 $\frac{2}{3}\left[3(x-2)+\frac{1-2x}{4}-\frac{1}{2}x\right] \le x+\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}\left[\frac{12x-24+1-2x-2x}{4}\right] \le x+\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}\left[\frac{8x-23}{4}\right] \le x+\frac{1}{2}$

$\frac{8x-23}{6} \le x+\frac{1}{2}$

$\frac{8x-23}{6} \le \frac{6x+3}{6}$

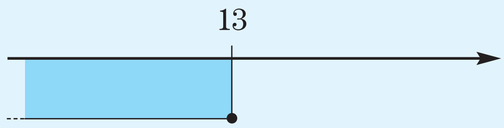
$8x-23 \le 6x+3$

$8x-6x \le 3+23$

$2x \le 26$

$x \le \frac{26}{2}$

$x \le 13$



Risolvi i seguenti problemi aritmetici e geometrici con l'aiuto delle equazioni.

61 Trova due numeri consecutivi tali che la differenza tra il triplo del minore ed il doppio del maggiore sia uguale a 28.

Due numeri sono consecutivi se la loro differenza è 1.
Primo numero (minore) $= x$
Secondo numero (suo successivo) $= x + 1$
Impostiamo l'equazione risolvente il problema:
$3x - 2(x + 1) = 28$
$3x - 2x - 2 = 28$
$3x - 2x = 28 + 2$
$x = 30$
Primo numero $= x = 30$
Secondo numero $= x + 1 = 30 + 1 = 31$

62 In una libreria i $\frac{3}{10}$ dei volumi sono testi scolastici, i $\frac{9}{20}$ libri di narrativa ed i rimanenti 10 sono romanzi. Quanti libri ci sono in quella libreria?

Indichiamo con x il numero totale dei volumi presenti sugli scaffali della libreria. L'equazione risolvente il problema è allora:

$$x = \frac{3}{10}x + \frac{9}{20}x + 10$$

Risolviamo l'equazione:

$$\frac{20x}{20} = \frac{6x + 9x + 200}{20}$$

$20x - 6x - 9x = 200$
$5x = 200$
$x = 40$
I volumi presenti sulla libreria sono 40.

63 Sommando la terza parte di un numero alla sua sesta parte si ottiene la metà del numero stesso aumentata di 1. Qual è il numero?

Numero $= x$ — Terza parte del numero $= \frac{1}{3}x$

Sesta parte del numero $= \frac{1}{6}x$ — Metà del numero $= \frac{1}{2}x$

Impostiamo l'equazione risolvente il problema:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x = \frac{1}{2}x + 1$$

$$\frac{2x + x}{6} = \frac{3x + 6}{6}$$

$2x + x = 3x + 6$

$2x + x - 3x = 6$

$0x = 6 \Rightarrow$ equazione impossibile

Il problema non ha soluzione, è impossibile.

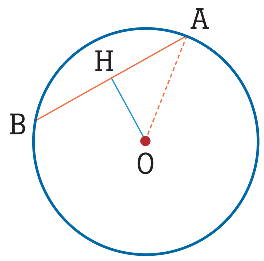
64 In un allevamento di polli e di conigli si contano 39 teste e 108 zampe. Quanti sono i conigli e quanti i polli?

Numero di teste = 39 Numero di zampe = 108
Indichiamo con x il numero di polli; il numero dei conigli è $39 - x$ (perché evidentemente il numero degli animali totali è uguale al numero di teste, cioè 39).
I conigli hanno 4 zampe, mentre i polli solo 2, quindi:
numero di zampe di pollo $= 2x$
numero di zampe di coniglio $= 4(39 - x)$
Impostiamo l'equazione risolvente il problema:
$2x + 4(39 - x) = 108$
$2x + 156 - 4x = 108$
$2x - 4x = 108 - 156$
$-2x = -48$
$2x = 48$
$x = 24$
Numero di polli $= x = 24$; numero dei conigli $= 39 - x = 39 - 24 = 15$.

65 La distanza di una corda dal centro di una circonferenza è uguale ai $\frac{7}{25}$ del raggio e la loro somma misura 12,8 cm. Calcola la lunghezza del raggio.

$OH = \frac{7}{25}OA$

$OH + OA = 12,8$ cm



$OA = x$ $OH = \frac{7}{25}x$

$OH + OA = 12,8$ cm; sostituiamo le espressioni di OA e OH:

$$\frac{7}{25}x + x = 12,8$$

$$\frac{7x + 25x}{25} = \frac{320}{25}$$

$$7x + 25x = 320$$

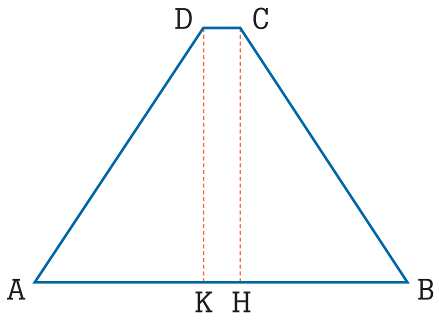
$$32x = 320$$

$$x = \frac{320}{32} = 10 \Rightarrow OA = 10 \text{ cm}$$

66 La base minore di un trapezio isoscele è uguale a $\frac{1}{10}$ della maggiore e questa è uguale ai $\frac{4}{3}$ del lato obliquo. Sapendo che il perimetro è 156 cm, calcola l'area del trapezio.

$DC = \frac{1}{10}AB$ $AB = \frac{4}{3}CB$

$2p = 156$ cm $\text{Area}_{ABCD} = ?$



Osservando le relazioni date vediamo che CB non dipende da nessun lato, quindi lo poniamo uguale ad x.

$CB = x$ $AB = \frac{4}{3}x$ $DC = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{3}x = \frac{2}{15}x$

L'equazione risolvente il problema è:

somma dei lati = perimetro $\Rightarrow x + x + \frac{4}{3}x + \frac{2}{15}x = 156$

$$\frac{15x + 15x + 20x + 2x}{15} = \frac{2340}{15}$$

$$52x = 2340$$

$$x = \frac{2340}{52}$$

$$x = 45$$

CB = 45 cm

$AB = \frac{4}{3} \cdot 45 = 60$ cm $\qquad DC = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{3} \cdot 45 = 6$ cm

Per determinare l'area è necessario determinare il valore dell'altezza CH.

$$HB = \frac{AB - DC}{2} = \frac{60-6}{2} = 27 \text{ cm}$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo CHB:

$$CH = \sqrt{CB^2 - HB^2} = \sqrt{45^2 - 27^2} = \sqrt{2025 - 729} = \sqrt{1296} = 36 \text{ cm}$$

$$\text{Area} = \frac{(AB + DC) \cdot CH}{2} = \frac{(60+6) \cdot 36}{2} = \frac{66 \cdot 36}{2} = 1188 \text{ cm}^2$$

Briciole di teoria

TEOREMA DI PITAGORA
In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

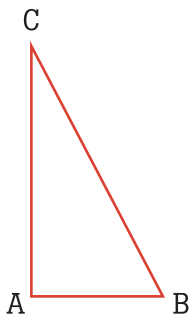
$$i = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$
$$c_1 = \sqrt{i^2 - c_2^2}$$
$$c_2 = \sqrt{i^2 - c_1^2}$$

67 In un triangolo rettangolo un cateto è uguale ai $\frac{3}{4}$ dell'altro e l'ipotenusa misura 35 cm. Calcola il perimetro del triangolo.

$AB = \frac{3}{4} AC$

BC = 35 cm

$2p = ?$



$AC = x \qquad AB = \frac{3}{4}x$

Applichiamo il teorema di Pitagora e ricaviamo l'equazione risolvente il problema:

$$AC^2 + AB^2 = CB^2$$

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 1225$$

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 1225$$

$$\frac{25}{16}x^2 = 1225$$

$$x^2 = 1225 \cdot \frac{16}{25} = 49 \cdot 16$$

$$x = \sqrt{49 \cdot 16} = 7 \cdot 4 = 28$$

AC = 28 cm

$AB = \frac{3}{4} \cdot 28 = 21$ cm

$2p = AB + BC + AC = (21 + 35 + 28) = 84$ cm