Trasformazioni geometriche

SEZ. N

- Isometrie
- Omotetia e similitudine
- Teoremi di Euclide e teorema di Talete

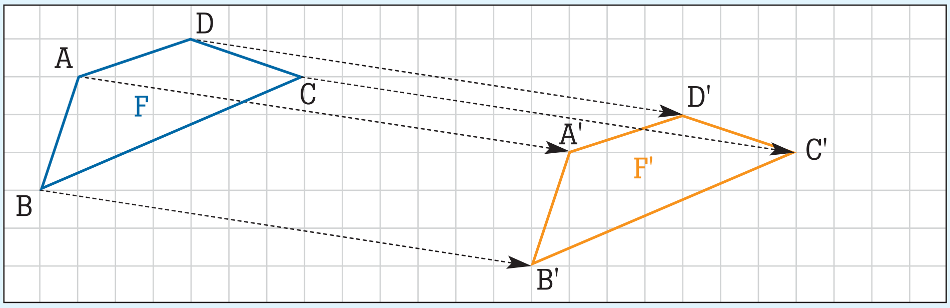
Isometrie

1 **Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

a V F Applicando un'isometria a una figura, essa si deforma.
b V F La simmetria centrale è una particolare rotazione.
c V F La simmetria centrale non conserva il parallelismo.
d V F In una simmetria centrale il punto medio del segmento che congiunge un punto con il suo corrispondente coincide con il centro di simmetria.
e V F In una simmetria assiale una freccia che va da sinistra a destra si trasforma in una freccia che va da destra a sinistra.
f V F Le rotazioni possono avvenire solo in senso antiorario.
g V F Per individuare una rotazione è sufficiente conoscere l'ampiezza dell'angolo di rotazione.
h V F In una rotazione si conservano le ampiezze degli angoli.
i V F Il vettore traslazione è un segmento orientato.
l V F Applicando due traslazioni successive a una figura F, essa risulta sempre traslata rispetto alla figura iniziale.

a F Perché le isometrie, che sono traslazione, rotazione e simmetria, non deformano la figura, ma cambiano solo la sua posizione sul piano.
b V La simmetria centrale equivale a una rotazione della figura di 180° attorno a un punto detto centro di simmetria.
c F La simmetria centrale è un'isometria, quindi conserva tutte le proprietà di una figura.
d V Infatti per disegnare il simmetrico di un punto P rispetto al centro O di simmetria si congiunge P con O e si prolunga il segmento PO di un segmento OP' congruente a OP.
e F L'affermazione è vera solo se l'asse di simmetria è un retta verticale.
f F Una rotazione può avere senso orario o antiorario.
g F In una rotazione è necessario conoscere il centro di rotazione, l'ampiezza dell'angolo e il senso di rotazione.
h V La rotazione è un'isometria, quindi la figura cambia posizione ma non si deforma.
i V Per effettuare una traslazione è necessario conoscere la lunghezza del segmento, la direzione e il verso: la retta sostegno del segmento indica la direzione, la posizione della freccia indica il verso (o orientamento).
l V Applicare due traslazioni successive equivale a sommare i due vettori traslazione; dato che la somma di due vettori è ancora un vettore si ha che la somma di due traslazioni è ancora una traslazione.

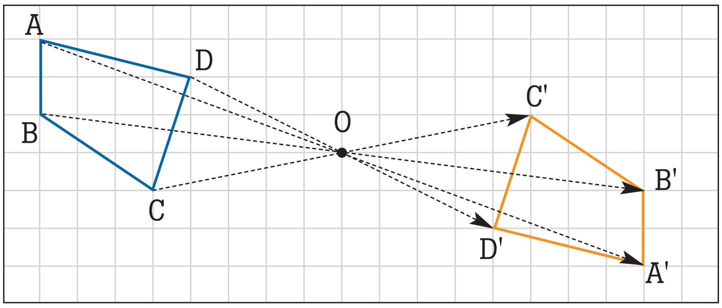
2 **Osserva la figura e stabilisci quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali no.**



a V F La figura F è stata trasformata in F' mediante un movimento rigido.
b V F Lo spostamento da F a F' è curvilineo.
c V F Lo spostamento da F a F' è effettuato su rette parallele.
d V F La distanza tra punti corrispondenti di F ed F' è sempre uguale.
e V F Lo spostamento da F a F' è una traslazione.
f V F La traslazione non è una trasformazione geometrica.

a V La figura F' non ha subito deformazioni rispetto a F.
b F Ogni vertice di F si è spostato lungo linee rette.
c V Tutti i vettori spostamento $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ sono tra loro paralleli.
d V Perché i vettori spostamento sono tutti congruenti tra loro.
e V La trasformazione è ottenuta mediante vettori congruenti e paralleli.
f F La traslazione è una particolare trasformazione geometrica isometrica.

3 **Osserva la figura e rispondi alle seguenti domande.**



a La figura A'B'C'D' è la trasformata di ABCD in una rotazione di centro O?
b Qual è l'ampiezza dell'angolo di rotazione?
c Il senso è orario o antiorario?
d Come viene definito questo particolare tipo di rotazione?

a Sì, perché OD e OD' sono congruenti e per passare da D a D' ruotiamo il segmento OD di 180°. Lo stesso vale per gli altri estremi C, B, A e per tutti gli altri punti della figura.
b L'ampiezza della rotazione è 180°.
c Il senso può essere considerato sia orario, sia antiorario perché la rotazione è ampia 180°.
d La trasformazione illustrata è anche una simmetria di centro O.

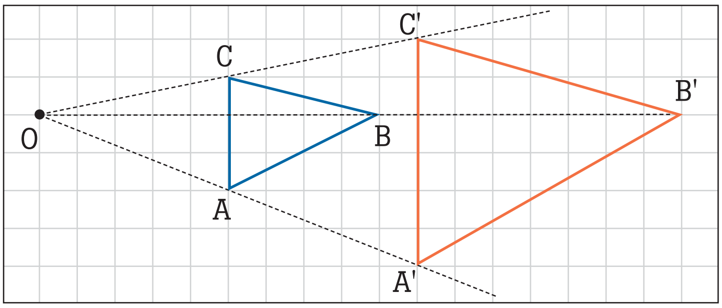
Omotetia e similitudine

4 **Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

a V F Nell'omotetia si mantiene la lunghezza dei segmenti.
b V F La scala di riduzione è un rapporto di similitudine.
c V F Per disegnare una trasformazione non isometrica si può usare un reticolo.
d V F In due triangoli simili il rapporto tra due lati qualsiasi del primo è uguale al rapporto tra due lati qualsiasi del secondo.
e V F Due figure sono simili se gli angoli corrispondenti sono in rapporto costante.

a F In generale l'omotetia non è un'isometria, quindi non mantiene costante la lunghezza dei segmenti. Essi si ingrandiscono se il rapporto di omotetia k risulta < -1 oppure > 1, si rimpiccioliscono se risulta $-1 < k < 1$; solo se $k = \pm 1$ si mantiene la lunghezza dei segmenti.
b V Il valore della scala (ad esempio 1 : 50) rappresenta il rapporto di similitudine k.
c V Utilizzando reticoli le cui maglie sono dei parallelogrammi, si ottiene una trasformazione affine, usando reticoli a maglie quadrangolari si ottiene una trasformazione proiettiva, se i quadrilateri sono trapezi la trasformazione proiettiva si chiama prospettiva.
d F Nella similitudine si mantiene costante il rapporto tra lati omologhi e non tra lati qualsiasi.
e F In figure simili gli angoli corrispondenti (omologhi) sono congruenti.

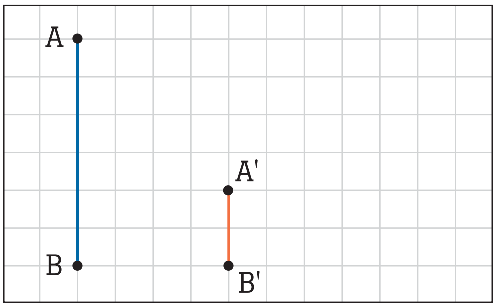
5 **Osserva la figura e rispondi alle seguenti domande.**



a Che tipo di trasformazione è stata applicata ad ABC per ottenere A'B'C'?
b Sapendo che OA' = 2OA, cosa puoi dire del segmento OB'? E di OC'?
c Quale punto rappresenta il centro dell'omotetia?
d Quale numero rappresenta il rapporto di omotetia?
e L'omotetia applicata è inversa o diretta?
f Il triangolo A'B'C' è ingrandito rispetto al triangolo dato ABC? Perché?

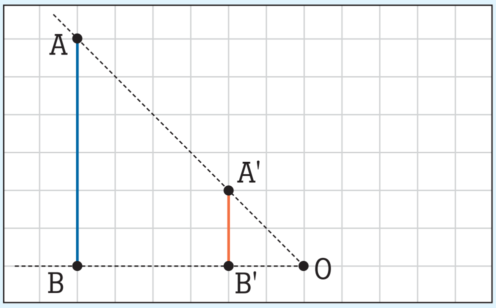
a La trasformazione è un'omotetia.
b Se OA' = 2OA, anche OB' = 2OB e OC' = 2OC.
c Il centro di omotetia è il punto O comune a tutte le rette congiungenti i punti omologhi delle figure.
d Il rapporto di omotetia k è 2.
e L'omotetia applicata è diretta perché il triangolo A'B'C' è situato dalla stessa parte del triangolo ABC rispetto al centro O.
f Il triangolo trasformato per omotetia è ingrandito perché il rapporto di omotetia $k = 2$ è maggiore di 1; se il coefficiente fosse minore di 1 la figura trasformata si rimpicciolirebbe.

6 **Osserva i segmenti AB e A'B' in figura e rispondi alle seguenti domande.**

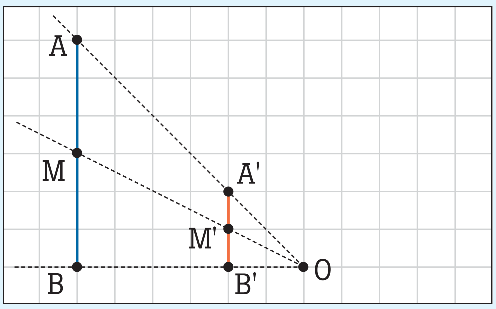


a Determina la posizione del centro di omotetia che trasforma il segmento AB nel segmento A'B'.
b Si tratta di un'omotetia diretta o inversa?
c Qual è il rapporto di omotetia?
d Chiama M il punto medio di AB e determina il suo omotetico M' su A'B'.
e Cosa osservi?

a Congiungiamo A con A' e B con B' e prolunghiamo le congiungenti fino a trovare il punto di intersezione di AA' e BB', che è il centro di omotetia O cercato.

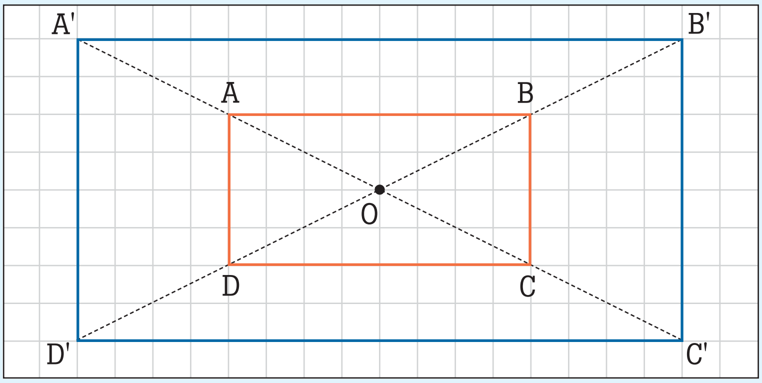


b Si tratta di un'omotetia diretta perché i due segmenti si trovano dalla stessa parte rispetto al centro di omotetia.
c Il rapporto di omotetia è $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
d Uniamo M con il centro di omotetia O; l'intersezione di MO con A'B' determina il punto M' su A'B'.



e Osserviamo che M' è il punto medio di A'B'.

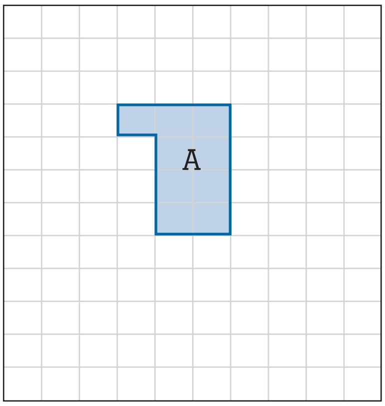
7 **Trasforma un rettangolo ABCD in una omotetia di centro O e $k = 2$ sapendo che O è l'intersezione delle diagonali del rettangolo. Come risulta la figura trasformata? Perché?**



Prolunghiamo il segmento OB e su di esso prendiamo il punto B' in modo che OB' = 2OB (essendo $k = 2$) e procediamo nello stesso modo per tutti gli altri punti; otteniamo così i quattro vertici del nuovo rettangolo.

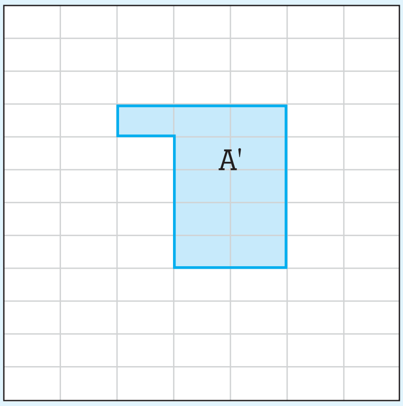
A'B'C'D' è ingrandito rispetto a ABCD, perché il rapporto di omotetia è maggiore di 1.

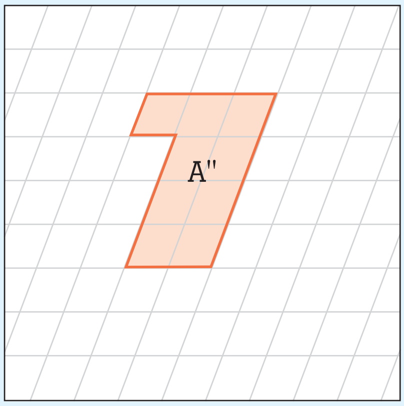
8 **Esegui una trasformazione affine sulla figura A.**



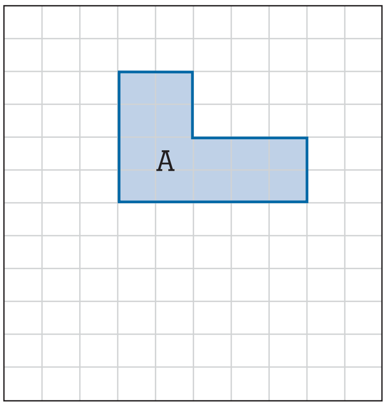
Per ottenere una trasformazione affine è sufficiente rappresentare la figura A su un reticolo le cui maglie siano parallelogrammi.

Le due figure A' e A" sono affini alla figura A perché le maglie dei due reticoli sono entrambe formate da parallelogrammi.

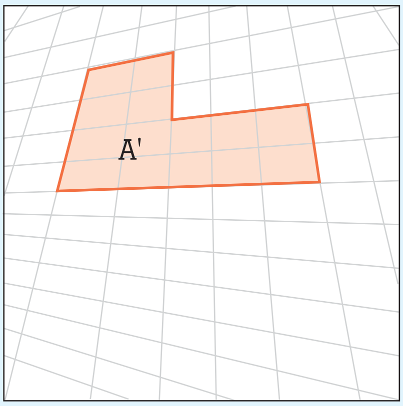




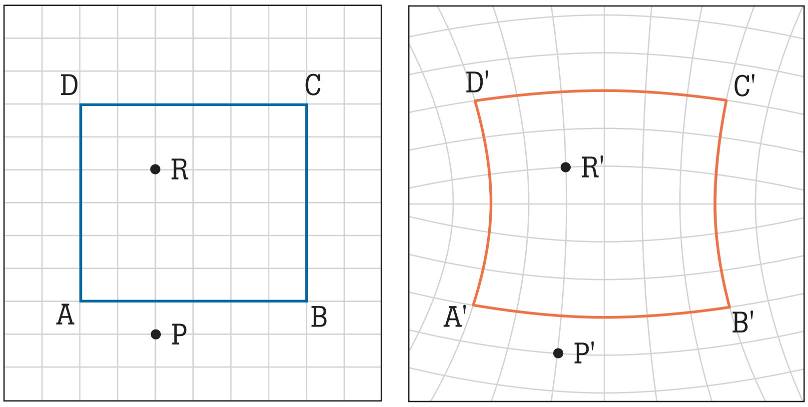
9 **Esegui una trasformazione proiettiva sulla figura A.**



Per ottenere una trasformazione proiettiva è sufficiente usare un reticolo che abbia come maglie dei quadrilateri. Ad esempio la figura A' è la trasformata della figura A mediante una trasformazione proiettiva.



10 **Osserva la figura e rispondi alle seguenti domande.**

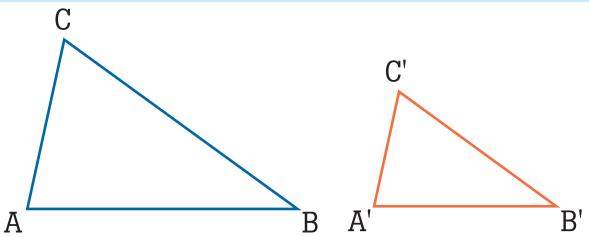


- **a** Quale trasformazione è stata applicata?
- **b** Come possiamo ottenere nella realtà un trasformazione topologica?
- **c** Ci sono somiglianze tra le due figure?

- **a** È stata applicata una trasformazione topologica.
- **b** È sufficiente disegnare la figura da trasformare su un a superficie deformabile, ad esempio possiamo disegnare la figura su un palloncino sgonfio e deformarla gonfiandolo.
- **c** Sì, il contorno della figura trasformata rimane una linea chiusa, il punto R' rimane interno alla figura A'B'C'D' e il punto P' esterno.

Risolvi i seguenti problemi.

11 Il triangolo ABC ha due angoli ampi 78° e 36°. Sapendo che A'B'C' ha due angoli ampi rispettivamente 78° e 66°, stabilisci se tali triangoli sono simili.



$\hat{A} = 78°$ $\hat{A}' = 78°$
$\hat{B} = 36°$ $\hat{C}' = 66°$

L'ampiezza della somma degli angoli interni di un triangolo è 180°. Quindi:

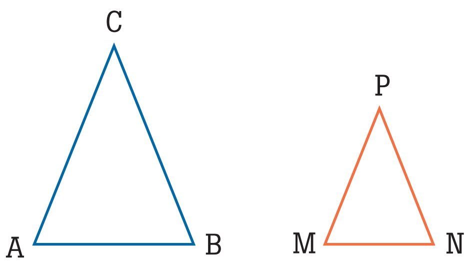
$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 180° - 78° - 36° = 66°$
$\hat{B}' = 180° - \hat{A}' - \hat{C}' = 180° - 78° - 66° = 36°$

I due triangoli hanno gli angoli ordinatamente congruenti, quindi sono simili per il primo criterio di similitudine.

Briciole di teoria

- **1° criterio di similitudine**
  Due triangoli sono simili se hanno gli angoli ordinatamente congruenti.
- **2° criterio di similitudine**
  Due triangoli sono simili se hanno un angolo congruente e i lati che lo comprendono ordinatamente proporzionali.
- **3° criterio di similitudine**
  Due triangoli sono simili se hanno i tre lati ordinatamente proporzionali.

12 L'angolo al vertice di una triangolo isoscele è ampio 44° e un angolo alla base di un altro triangolo isoscele è ampio 68°. Spiega perché i due triangoli sono simili.



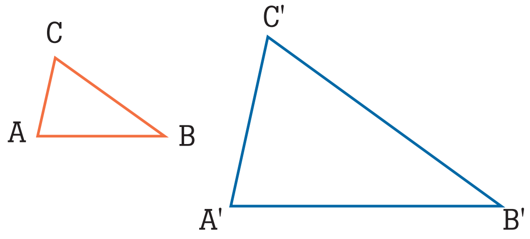
$\hat{C} = 44°$ $\hat{M} = \hat{N} = 68°$

Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti, quindi:

$$\hat{A} = \hat{B} = \frac{180° - \hat{C}}{2} = \frac{180° - 44°}{2} = 68°$$

$\hat{P} = 180° - \hat{M} - \hat{N} = 180° - 68° - 68° = 44°$
I due triangoli hanno gli angoli ordinatamente congruenti, quindi sono simili per il primo criterio di similitudine.

13 In due triangoli simili i lati omologhi hanno rapporto $\frac{7}{3}$. Sapendo che il primo triangolo ha i lati lunghi rispettivamente 14 cm, 21 cm e 28 cm, calcola il perimetro del secondo triangolo.



$\frac{A'B'}{AB} = \frac{7}{3}$ AC = 14 cm

BC = 28 cm AB = 21 cm $2p' = ?$

$2p = AB + BC + AC = (14 + 21 + 28)\text{ cm} = 63\text{ cm}$

$\frac{2p'}{2p} = \frac{7}{3}$

$2p' : 2p = 7 : 3$

$2p' : 63\text{ cm} = 7 : 3$

$2p' = 63\text{ cm} \cdot \frac{7}{3} = 147\text{ cm}$

Briciole di teoria

In due poligoni simili il rapporto tra i perimetri è uguale al rapporto tra i lati omologhi, cioè uguale al rapporto di similitudine.

14 Il rapporto di similitudine tra le aree di due poligoni simili è uguale a $\frac{1}{4}$. Qual è il perimetro del secondo poligono se il perimetro del primo è lungo 20 cm?

Il problema non specifica di quale poligono si tratti; possiamo indicare con P_1 il primo poligono e con P_2 il secondo anche senza rappresentarli.

$2p_1 = 20\text{ cm}$ $\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{4}$ $2p_2 = ?$

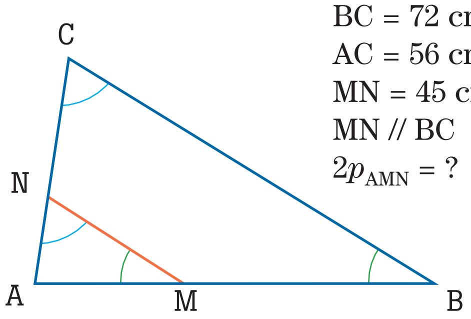
$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ⇒ rapporto di similitudine tra P_2 e P_1

$\frac{2p_2}{2p_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2p_2 : 2p_1 = 1 : 2 \Rightarrow 2p_2 : 20\text{ cm} = 1 : 2 \Rightarrow 2p_2 = 20\text{ cm} \cdot \frac{1}{2} = 10\text{ cm}$

Briciole di teoria

In due poligoni simili il rapporto tra le aree è uguale al quadrato del rapporto tra i lati omologhi e al quadrato del rapporto tra i perimetri, cioè è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.

15 È dato il triangolo ABC con AB = 64 cm, BC = 72 cm e AC = 56 cm. Al suo interno è tracciato un segmento MN lungo 45 cm e parallelo a BC. Calcola la lunghezza del perimetro del triangolo AMN.



AB = 64 cm
BC = 72 cm
AC = 56 cm
MN = 45 cm
MN // BC
$2p_{AMN} = ?$

Consideriamo i due triangoli AMN e ABC, che hanno:

- $A\hat{M}N = A\hat{B}C$ perché corrispondenti rispetto alle parallele MN e BC tagliate dalla trasversale AB;
- $A\hat{N}M = A\hat{C}B$ perché corrispondenti rispetto alle parallele MN e BC tagliate dalla trasversale AC.

I due triangoli AMN e ABC sono simili per il primo criterio di similitudine.

Possiamo impostare le proporzioni per calcolare la lunghezza dei lati AM e AN:

$MN : BC = AM : AB \Rightarrow 45\text{ cm} : 72\text{ cm} = AM : 64\text{ cm} \Rightarrow AM = \frac{45 \cdot 64}{72}\text{ cm} = 40\text{ cm}$

$MN : BC = AN : AC \Rightarrow 45\text{ cm} : 72\text{ cm} = AN : 56\text{ cm} \Rightarrow AN = \frac{45 \cdot 56}{72}\text{ cm} = 35\text{ cm}$

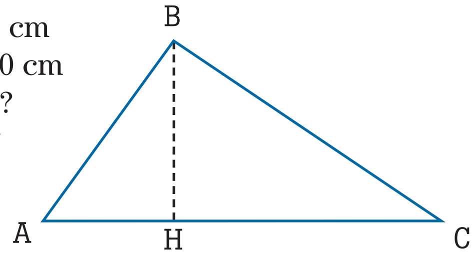
$2p_{AMN} = AN + MN + AM = (35 + 45 + 40)\text{ cm} = 120\text{ cm}$

Teoremi di Euclide e teorema di Talete

Risolvi i seguenti problemi.

16 In un triangolo rettangolo la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è lunga 54 cm e l'ipotenusa 150 cm. Calcola il perimetro e l'area del triangolo.

$AH = 54$ cm
$AC = 150$ cm
$2p_{ABC} = ?$
$A_{ABC} = ?$



$HC = AC - AH = 150 \text{ cm} - 54 \text{ cm} = 96 \text{ cm}$

Applichiamo il secondo teorema di Euclide:

$AH : BH = BH : HC$

$54 \text{ cm} : BH = BH : 96 \text{ cm}$

$BH = \sqrt{54 \cdot 96} \text{ cm} = \sqrt{5184} \text{ cm} = 72 \text{ cm}$

$A_{ABC} = \dfrac{AC \cdot BH}{2} = \dfrac{150 \cdot 72}{2} \text{ cm}^2 = 5400 \text{ cm}^2$

Applichiamo il primo teorema di Euclide:

$AH : AB = AB : AC$

$54 \text{ cm} : AB = AB : 150 \text{ cm}$

$AB = \sqrt{54 \cdot 150} \text{ cm} = \sqrt{8100} \text{ cm} = 90 \text{ cm}$

$HC : BC = BC : AC$

$96 \text{ cm} : BC = BC : 150 \text{ cm}$

$BC = \sqrt{96 \cdot 150} \text{ cm} = \sqrt{14\,400} \text{ cm} = 120 \text{ cm}$

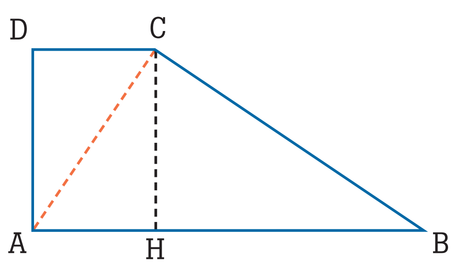
$2p_{ABC} = AB + BC + AC = (90 + 120 + 150) \text{ cm} = 360 \text{ cm}$

Briciole di teoria

- **Secondo teorema di Euclide**
  In ogni triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stessa.

- **Primo teorema di Euclide**
  In ogni triangolo un cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa stessa.

17 La diagonale minore di un trapezio rettangolo è lunga 45 dm ed è perpendicolare al lato obliquo. Sapendo che la base minore è lunga 27 dm, calcola l'area e il perimetro del trapezio.



$AC = 45$ dm
$A\hat{C}B = 90°$
$DC = AH = 27$ dm
$2p_{ABCD} = ?$
$A_{ABCD} = ?$

Il triangolo ACB è rettangolo in C e perciò possiamo applicare il primo teorema di Euclide:

$AH : AC = AC : AB$
$27 \text{ dm} : 45 \text{ dm} = 45 \text{ dm} : AB$

$AB = \dfrac{45 \cdot 45}{27} \text{ dm} = 75 \text{ dm}$

$HB = AB - AH = (75 - 27) \text{ dm} = 48 \text{ dm}$

Applichiamo il primo teorema di Euclide al triangolo ACB:

$AB : CB = CB : HB$
$75 \text{ dm} : CB = CB : 48 \text{ dm}$

$CB = \sqrt{75 \cdot 48} \text{ dm} = \sqrt{3600} \text{ dm} = 60 \text{ dm}$

Applichiamo il secondo teorema di Euclide al triangolo ACB:

AH : CH = CH : HB

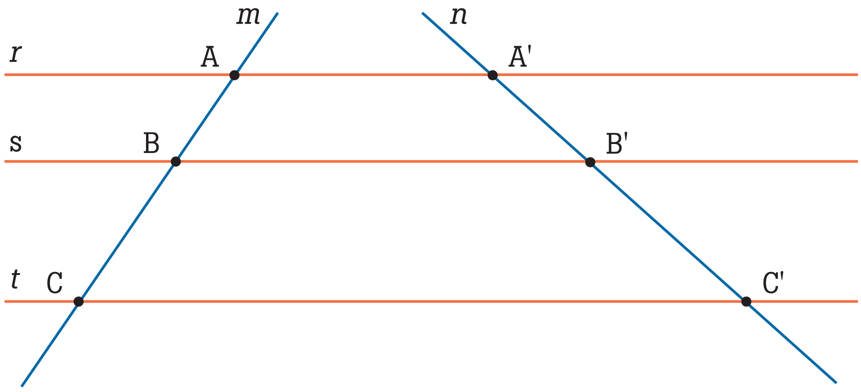
27 dm : CH = CH : 48 dm

$CH = \sqrt{27 \cdot 48}\ dm = \sqrt{1296}\ dm = 36\ dm = AD$

$2p_{ABCD} = AB + BC + DC + AD = (75 + 60 + 27 + 36)\ dm = 198\ dm$

$A_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot CH}{2} = \frac{(75 + 27) \cdot 36}{2}\ dm^2 = 1836\ dm^2$

18 Tre rette parallele sono tagliate da due trasversali. La prima trasversale interseca le tre parallele nei punti A, B e C, la seconda nei punti A', B' e C'. Sapendo che AB è i $\frac{3}{4}$ di BC e che A'B' è lungo 12 cm, calcola la lunghezza di B'C'.



$AB = \frac{3}{4}BC$

A'B' = 12 cm

B'C' = ?

Per risolvere questo problema è necessario applicare il teorema di Talete:

$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ o anche $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$

Se $AB = \frac{3}{4}BC$ allora $BC = \frac{4}{3}AB \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$

$\frac{4}{3} = \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{B'C'}{A'B'}$

- **Teorema di Talete**
  Due o più rette parallele attraversate da due trasversali determinano segmenti corrispondenti in proporzione.

Briciole di teoria

Questa è l'uguaglianza di due rapporti che può essere scritta sotto forma di proporzione:

4 : 3 = B'C' : A'B'

4 : 3 = B'C' : 12 cm

$B'C' = \frac{4 \cdot 12}{3}\ cm = 16\ cm$