Circonferenza e cerchio

SEZ. M

- La circonferenza e il cerchio
- Poligoni inscritti e circoscritti a una circonferenza

La circonferenza e il cerchio

1 **Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

a V F Il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il raggio è costante e si indica con π.

b V F Il numero π è decimale illimitato non periodico.

c V F L'ampiezza di un arco di circonferenza è l'angolo alla circonferenza che insiste sull'arco.

d V F Un angolo alla circonferenza ha il vertice sulla circonferenza e per estremi sempre due punti qualsiasi della circonferenza.

e V F Per un punto P appartenente a una circonferenza possiamo tracciare infinite rette tangenti alla circonferenza.

f V F Tutti i punti di un cerchio hanno la stessa distanza dal centro.

g V F Il diametro perpendicolare a una corda passa per il suo punto medio.

h V F Il semicerchio è un settore circolare.

a F Perché π è il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella del diametro.

b V Quindi π è un numero irrazionale.

c F L'ampiezza di un arco è l'angolo al centro che insiste sull'arco.

d F I lati di un angolo alla circonferenza possono essere due corde con un estremo in comune, oppure una corda e una semiretta tangente alla circonferenza e con l'origine in un estremo della corda.

e F Per il punto P passano infinite rette, ma una sola è perpendicolare al raggio in quel punto e quindi una sola è la tangente.

f F Il cerchio è la parte di piano delimitata dalla circonferenza, quindi i suoi punti possono avere distanze dal centro variabili, ma minori o uguali al raggio; solo i punti della circonferenza hanno distanza dal centro uguale al raggio.

g V Il diametro passa per il centro della circonferenza, quindi, se è perpendicolare alla corda, contiene il segmento di distanza della corda dal centro; siccome la distanza passa sempre per il punto medio della corda, allora anche il diametro, a cui la distanza appartiene, passa per il punto medio della corda.

h V È un settore circolare particolare in cui l'angolo al centro è piatto.

Scegli la risposta esatta.

2 **Che differenza esiste tra i termini circonferenza e cerchio?**

a Nessuna.
b La circonferenza è una linea chiusa, il cerchio è una parte di piano delimitata dalla circonferenza.
c Circonferenza è il termine geometrico corretto per indicare il cerchio.
d La circonferenza è una superficie e il cerchio una lunghezza.

La risposta esatta è **b**: data la figura piana cerchio, la circonferenza ne rappresenta il contorno e corrisponde all'insieme di tutti i punti equidistanti dal centro.

3 **Per calcolare la lunghezza di una circonferenza, si moltiplica per π la lunghezza:**

- **a** del diametro.
- **b** del raggio.
- **c** di una corda qualsiasi.
- **d** di un arco di circonferenza qualsiasi.

La risposta esatta è **a**: data la formula $c = 2\pi r$, vale $d = 2r$, quindi possiamo dire $c = \pi d$.

4 **Il segmento che unisce un punto della circonferenza al centro si chiama:**

- **a** raggio.
- **b** diametro.
- **c** corda.
- **d** arco.

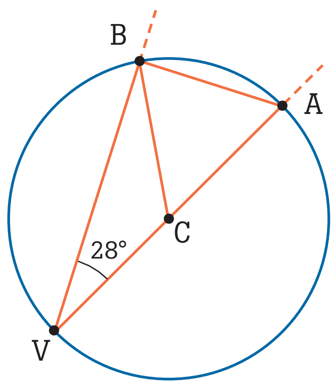
La risposta esatta è **a**: infatti per definizione il raggio è qualunque segmento che unisce il centro con un punto della circonferenza, una corda è un segmento che unisce due punti qualsiasi della circonferenza, il diametro è una corda passante per il centro della circonferenza, un arco è la parte di circonferenza compresa tra due punti.

5 **La misura dell'area del cerchio si calcola moltiplicando per π la misura al quadrato:**

- **a** del raggio.
- **b** del diametro.
- **c** di una corda qualsiasi.
- **d** di un settore circolare qualsiasi.

La risposta esatta è **a**: la formula per il calcolo dell'area del cerchio è $A = \pi r^2$, una potenza di esponente 2 è un quadrato, quindi r^2 significa il quadrato del raggio.

6 **Osserva la seguente figura e completa.**



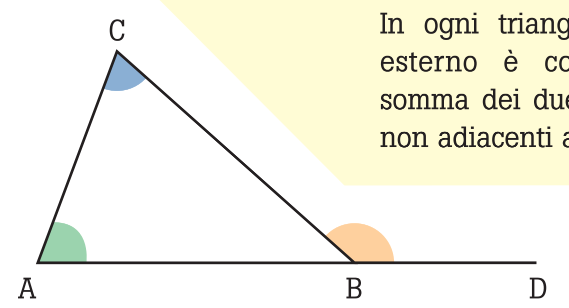
$B\hat{V}A = 28°$
$CV = 12$ cm

- **a** $C\hat{B}V$ = ...
- **b** $B\hat{C}A$ = ...
- **c** $V\hat{A}B$ = ...
- **d** $A\hat{B}V$ = ...
- **e** VA = ...
- **f** CB = ...

Briciole di teoria

• **Teorema dell'angolo esterno**

In ogni triangolo un angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti ad esso.



$C\hat{B}D = \hat{A} + \hat{C}$

- **a** Il triangolo BVC è isoscele perché VC = BC = raggio e perciò ha gli angoli adiacenti alla base BV congruenti e $C\hat{B}V = C\hat{V}B = 28°$.
- **b** L'angolo $B\hat{C}A$ è esterno al triangolo VBC ed è uguale alla somma dei due angoli non adiacenti, quindi $B\hat{C}A = C\hat{V}B + C\hat{B}V = 28° + 28° = 56°$.
- **c** Il triangolo VAB è rettangolo in B perché VA è un diametro e quindi il triangolo è inscritto in una semicirconferenza; $B\hat{V}A$ e $V\hat{A}B$ sono allora complementari: $B\hat{A}V = 90° - B\hat{V}A = 90° - 28° = 62°$
- **d** Per quanto detto al punto **c** $A\hat{B}V = 90°$.
- **e** La corda VA passa per il centro, quindi è un diametro, cioè $VA = 2CV = 24$ cm.
- **f** Il segmento CB è un raggio, quindi CB = CV = 12 cm.

Risolvi i seguenti problemi.

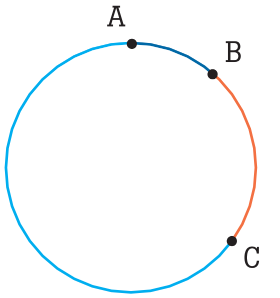
7 In una circonferenza con il raggio lungo 5 cm, si traccia una corda AB. Quale può essere al massimo la sua lunghezza?

La corda massima di una circonferenza è il diametro, che è il doppio del raggio, quindi la lunghezza massima cercata è 10 cm.

8 In una circonferenza di centro O considera la corda massima lunga 8 cm. Quanto è lungo il raggio?

La corda massima di ogni circonferenza è il suo diametro. Se la corda massima è lunga 8 cm, il raggio è la sua metà e perciò è lungo 4 cm.

9 Calcola la lunghezza di una circonferenza sapendo che è divisa in 3 archi di cui il primo, lungo 36 cm, è il doppio del secondo e il secondo è il doppio del terzo.

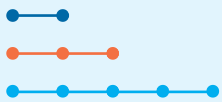


$\overset{\frown}{AC} = 36$ cm $\overset{\frown}{AC} = 2\overset{\frown}{CB}$

$\overset{\frown}{CB} = 2\overset{\frown}{BA}$ $c = ?$

Rappresentiamo graficamente i dati del problema:

3° arco
2° arco
1° arco



Il primo arco è formato da 4 parti uguali al terzo arco, quindi:

36 cm : 4 = 9 cm ⇒ lunghezza del 3° arco
9 cm · 2 = 18 cm ⇒ lunghezza del 2° arco

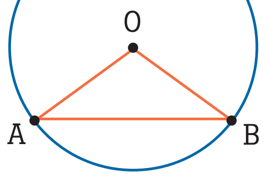
La somma dei tre archi è la circonferenza, perciò:

$c = (9 + 18 + 36)$ cm $= 63$ cm

10 Una circonferenza lunga 90 cm è divisa in quattro parti, una semicirconferenza e tre archi congruenti fra loro. Calcola la lunghezza di ognuna delle parti in cui è divisa la circonferenza.

La semicirconferenza è lunga 90 cm : 2 = 45 cm. La restante parte, lunga 45 cm, è divisa in 3 parti congruenti, quindi lunghe 45 cm : 3 = 15 cm.

11 In una circonferenza di centro O e con il raggio lungo 3 cm, traccia la corda AB lunga 4 cm e calcola il perimetro del triangolo ABO.



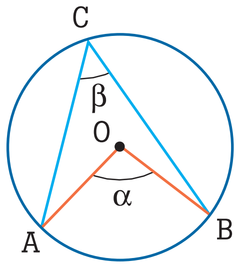
AB = 4 cm   OB = OA = 3 cm

$2p_{AOB} = ?$

Il triangolo AOB è isoscele perché AO e OB sono due raggi, quindi:

$2p_{AOB} = (4 + 3 + 3)$ cm $= 10$ cm

12 La somma di un angolo al centro e del suo corrispondente angolo alla circonferenza è un angolo ampio 111°. Determina l'ampiezza dei due angoli.



$\alpha + \beta = 111°$

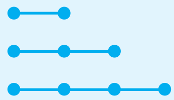
$\alpha = ?$ $\qquad \beta = ?$

L'angolo al centro α è il doppio dell'angolo alla circonferenza β perché entrambi insistono sull'arco $\overset{\frown}{AB}$. Rappresentiamo i dati graficamente:

$\beta \Rightarrow$

$\alpha \Rightarrow$

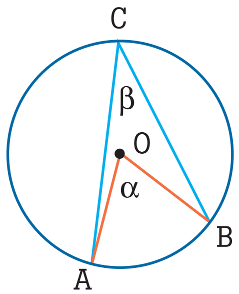
$\alpha + \beta \Rightarrow$



$111° : 3 = 37° \quad \Rightarrow \beta$

$37° \cdot 2 = 74° \quad \Rightarrow \alpha$

13 Un angolo al centro è i $\frac{3}{8}$ di un angolo ampio 96°. Calcola l'ampiezza del corrispondente angolo alla circonferenza.



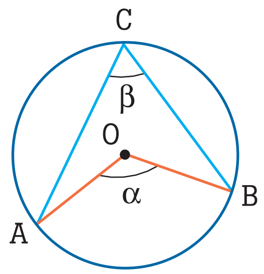
$\alpha = \frac{3}{8} \cdot 96°$

$\beta = ?$

$\alpha = \frac{3}{8} \cdot 96° = 36°$

$\beta = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \cdot 36° = 18°$

14 Calcola l'ampiezza dell'angolo alla circonferenza che insiste su un arco che è $\frac{1}{3}$ della circonferenza.



$\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{3}c$ $\qquad \beta = ?$

L'angolo al centro α che insiste sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ è $\frac{1}{3}$ dell'angolo giro:

$\alpha = 360° \cdot \frac{1}{3} = 120°$

L'angolo alla circonferenza β che insiste sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ è metà dell'angolo α:

$\beta = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \cdot 120° = 60°$

15 Due angoli alla circonferenza sono complementari; come sono i due angoli al centro corrispondenti?

Gli angoli al centro che insistono su un arco sono il doppio dei corrispondenti angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco:

$\beta_1 = 2\alpha_1$ e $\beta_2 = 2\alpha_2$

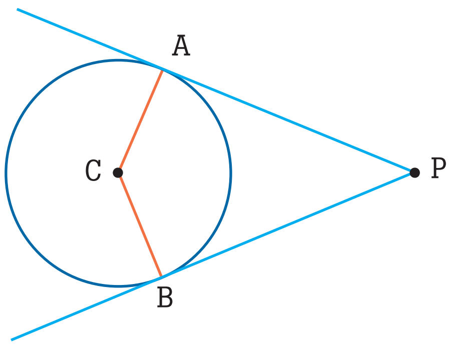
Se gli angoli alla circonferenza sono complementari, i corrispondenti angoli al centro sono supplementari:

$\alpha_1 + \alpha_2 = 90° \quad \Rightarrow \qquad \beta_1 + \beta_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2 \cdot 90° = 180°$

16 Disegna una circonferenza con il raggio lungo 6 cm e traccia una retta in modo che la sua distanza dal centro sia i $\frac{2}{3}$ del raggio. Qual è la posizione della retta rispetto alla circonferenza?

Essendo la distanza della retta dal centro i $\frac{2}{3}$ del raggio, è minore del raggio stesso e quindi la retta è secante la circonferenza.

17 Da un punto P esterno a una circonferenza di centro C traccia due rette tangenti alla circonferenza nei punti A e B. Sapendo che l'angolo formato dalle due tangenti è ampio 39°, determina l'ampiezza dell'angolo $A\hat{C}B$ contenente il punto P.



$A\hat{P}B = 39°$
$A\hat{C}B = ?$

I due segmenti PA e PB sono rispettivamente perpendicolari ai raggi AC e BC, quindi $C\hat{A}P = C\hat{B}P = 90°$. In un quadrilatero la somma degli angoli interni è 360°, quindi:

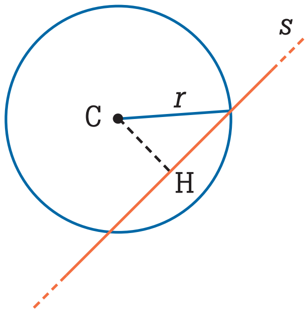
$$A\hat{C}B = 360° - C\hat{A}P - C\hat{B}P - A\hat{C}B =$$
$$= 360° - 90° - 90° - 39° = 141°$$

- **Teorema**

  Ogni tangente a una circonferenza è perpendicolare al raggio condotto nel punto di tangenza.

Briciole di teoria

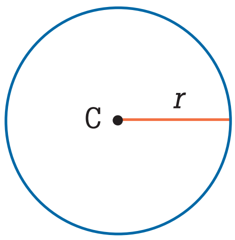
18 Sono date una circonferenza avente il diametro lungo 12 dm e una retta secante alla circonferenza. Indica fra quali valori è compresa la distanza di questa retta dal centro della circonferenza.



$2r = 12$ dm

Se il diametro è lungo 12 dm, il raggio è lungo la metà, cioè 6 dm.
La posizione della retta s può variare entro le posizioni estreme corrispondenti al passaggio per il centro e per il punto di tangenza: se la retta s passa per il centro la sua distanza CH è uguale a 0, se la retta è tangente alla circonferenza la sua distanza è uguale al raggio; quindi 0 dm ≤ CH < 6 dm.

19 Quanti metri percorre una ruota con il raggio di 60 cm che compie 3000 giri?



$r = 60$ cm

Il giro completo di una ruota corrisponde alla lunghezza della circonferenza della ruota:

$c = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 60$ cm $= 376{,}8$ cm

$376{,}8$ cm $\cdot\ 3000 = 1\,130\,400$ cm $= 11\,304$ m

Quindi i metri percorsi dalla ruota in 3000 giri sono 11 304.

20 La ruota di una motocicletta per percorrere 1884 m compie 1500 giri. Quanto è lungo il diametro della ruota?

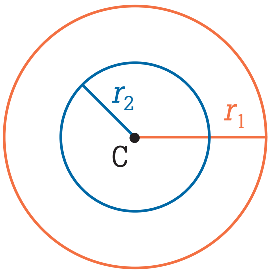
1884 m : 1500 = 1,256 m $\Rightarrow$ metri percorsi dalla ruota in un giro
Un giro di ruota corrisponde alla lunghezza della circonferenza della ruota:

c = 1,256 m = 125,6 cm

$$r = \frac{c}{2\pi} = \frac{125{,}6}{2 \cdot 3{,}14} \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

20 cm · 2 = 40 cm $\Rightarrow$ lunghezza del diametro della ruota

21 La somma dei raggi di due circonferenza concentriche è lunga 39 cm. Sapendo che un raggio è il doppio dell'altro, calcola l'area della corona circolare delimitata dalle circonferenze.



$r_1 + r_2$ = 33 cm
$r_1 = 2r_2$
$A_{\text{corona circolare}}$ = ?

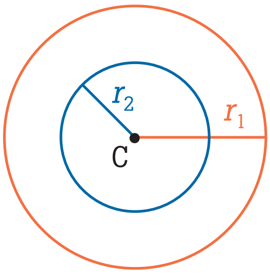
$r_2 \Rightarrow$ •—•
$r_1 \Rightarrow$ •—•—•
$r_2 + r_1 \Rightarrow$ •—•—•—•

33 cm : 3 = 11 cm $\Rightarrow$ lunghezza di •—•
11 cm · 1 = 11 cm $\Rightarrow$ r_2
11 cm · 2 = 22 cm $\Rightarrow$ r_1

$$A_{\text{corona}} = \pi(r_1^2 - r_2^2) = \pi(22^2 - 11^2)\ \text{cm}^2 =$$
$$= \pi(484 - 121)\ \text{cm}^2 = 363\pi\ \text{cm}^2$$

Briciole di teoria
Due circonferenze concentriche hanno lo stesso centro e raggi disuguali. La parte di piano compresa tra le due circonferenze si dice **corona circolare**.

22 Determina il raggio della maggiore tra due circonferenze concentriche, sapendo che la superficie della corona circolare che esse delimitano è di 185π cm² e che il raggio della circonferenza minore è lungo 16 cm.



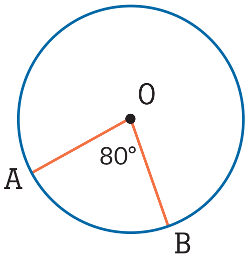
$A_{\text{corona circolare}} = 185\pi\ \text{cm}^2$
r_2 = 16 cm
r_1 = ?

$$A_2 = \pi r_2^2 = (16^2 \cdot \pi)\ \text{cm}^2 = 256\pi\ \text{cm}^2$$

$$A_1 = (185\pi + 256\pi)\ \text{cm}^2 = 441\pi\ \text{cm}^2$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{441\pi}{\pi}}\ \text{cm} = \sqrt{441}\ \text{cm} = 21\ \text{cm}$$

23 In un cerchio con il raggio lungo 3 m è stato individuato un settore ampio 80°. Calcola l'area del settore circolare.



AÔB = 80°
AO = 3 m
A_{settore} = ?

L'area del settore circolare e l'area del cerchio sono grandezze direttamente proporzionali alle rispettive ampiezze.

$$A_{\text{cerchio}} : A_{\text{settore}} = 360° : \alpha$$
$$A_{\text{cerchio}} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2\ \text{m}^2 = 9\pi\ \text{m}^2$$
$$9\pi\ \text{m}^2 : A_{\text{settore}} = 360° : 80°$$
$$A_{\text{settore}} = \frac{9\pi \cdot 80°}{360°}\ \text{m}^2 = 2\pi\ \text{m}^2$$

Poligoni inscritti e circoscritti a una circonferenza

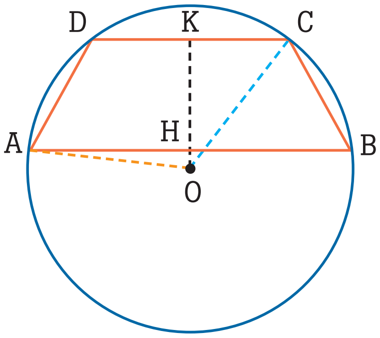
24 **Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

- **a** V F Il centro della circonferenza circoscritta a un poligono coincide con l'intersezione degli assi dei lati del poligono.
- **b** V F L'apotema di un poligono regolare è la distanza di ogni vertice dal centro della circonferenza inscritta.
- **c** V F Tutti i trapezi sono inscrivibili in una circonferenza.
- **d** V F Il parallelogramma in generale non è circoscrivibile alla circonferenza.
- **e** V F In un quadrato la diagonale coincide con un diametro della circonferenza circoscritta.
- **f** V F In un esagono regolare il lato è congruente al raggio della circonferenza circoscritta.

a V Perché i vertici del poligono inscritto in una circonferenza sono tutti equidistanti dal centro.
b F L'apotema è la distanza di ogni lato del poligono dal centro della circonferenza inscritta.
c F Infatti un trapezio è inscrivibile in una circonferenza solo se è isoscele.
d V Il parallelogramma è un quadrilatero e perciò è circoscrivibile a una circonferenza se gode della proprietà secondo la quale la somma dei lati opposti è uguale al semiperimetro: un parallelogramma che soddisfa questa proprietà è un rombo o un quadrato.
e V Perché la diagonale divide il quadrato in due triangoli rettangoli; l'angolo retto è un angolo alla circonferenza, quindi insiste sulla corda massima che è il diametro.
f V Perché congiungendo i sei vertici dell'esagono con il centro della circonferenza si ottengono sei triangoli isosceli, congruenti tra loro e con l'angolo al vertice nel centro della circonferenza. Tali angoli, congruenti, sono ampi 60° ciascuno perché la loro somma è un angolo giro. Un triangolo isoscele con l'angolo al vertice ampio 60° è necessariamente equilatero, quindi i lati dei sei triangoli sono tutti congruenti tra loro e perciò il lato dell'esagono è congruente al raggio.

Risolvi i seguenti problemi.

25 Due corde di un cerchio, avente l'area uguale a 7225π cm^2, sono parallele e situate dalla stessa parte rispetto al centro. Calcola l'area del trapezio che ha per basi queste due corde sapendo che la corda minore è lunga 154 cm e che l'altra dista dal centro 13 cm.



$A_{cerchio} = 7225\pi$ cm^2
CD = 154 cm
HO = 13 cm
$A_{ABCD} = ?$

$$OC = r = \sqrt{\frac{A_{cerchio}}{\pi}} = \sqrt{\frac{7225\pi}{\pi}}\ \text{cm} = 85\ \text{cm}$$

OK è altezza e mediana del triangolo DOC, quindi:

$$CK = \frac{1}{2}DC = 154\ \text{cm} \cdot \frac{1}{2} = 77\ \text{cm}$$

$$KO = \sqrt{CO^2 - CK^2} = \sqrt{85^2 - 77^2}\ \text{cm} = \sqrt{1296}\ \text{cm} = 36\ \text{cm}$$

$KH = KO - OH = (36 - 13)$ cm $= 23$ cm $\Rightarrow$ altezza del trapezio

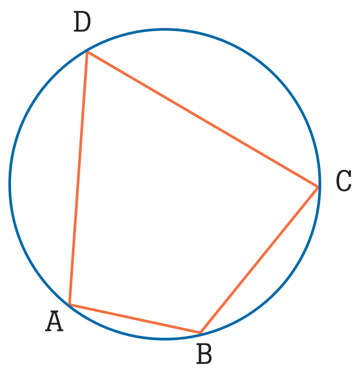
Il triangolo AOH è rettangolo in H perché, essendo AB e DC parallele, la retta KO perpendicolare a DC è perpendicolare anche ad AB; quindi:

$$AH = \sqrt{AO^2 - HO^2} = \sqrt{85^2 - 13^2}\ \text{cm} = \sqrt{7056}\ \text{cm} = 84\ \text{cm}$$

$$AB = 84\ \text{cm} \cdot 2 = 168\ \text{cm}$$

$$A_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot KH}{2} = \frac{(168 + 154) \cdot 23}{2}\ \text{cm}^2 = 3703\ \text{cm}^2$$

26 Calcola l'ampiezza degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{D}$ del quadrilatero inscritto nella circonferenza, sapendo che gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$ adiacenti al lato BC sono ampi rispettivamente 117° e 98°.



$\hat{B} = 117°$ $\quad \hat{C} = 98°$

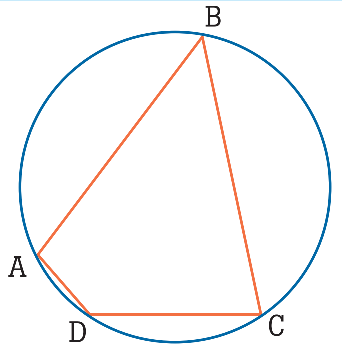
$\hat{A} = ?$ $\quad \hat{D} = ?$

Briciole di teoria

- **Teorema**
  In ogni quadrilatero inscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari.

$\hat{A} + \hat{C} = 180° \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = 180° - \hat{C} = 180° - 98° = 82°$
$\hat{B} + \hat{D} = 180° \quad \Rightarrow \quad \hat{D} = 180° - \hat{B} = 180° - 117° = 63°$

27 In un quadrilatero inscritto in una circonferenza un angolo è ampio 81° e un secondo angolo è $\frac{5}{9}$ del primo. Calcola l'ampiezza dei rimanenti angoli del quadrilatero.



$A\hat{B}C = 81° \quad B\hat{C}D = \frac{5}{9}\, A\hat{B}C$

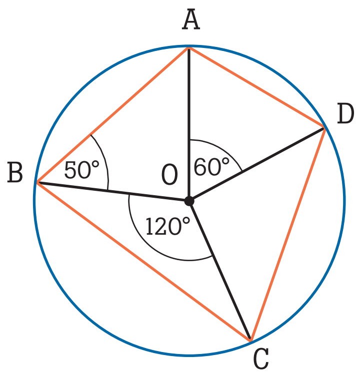
$\hat{A} = ? \quad \hat{D} = ? \quad \hat{C} = ?$

$\hat{C} = B\hat{C}D = 81° \cdot \frac{5}{9} = 45°$

Osserviamo che $\hat{C}$ non può essere l'angolo opposto di $\hat{B}$, perché avremmo $\hat{B} + \hat{C} = 126°$, e questo è impossibile perché il quadrilatero è inscritto. Quindi, come abbiamo rappresentato in figura, i due angoli devono essere adiacenti.
L'angolo $\hat{A}$ è supplementare di $\hat{C}$ e l'angolo $\hat{D}$ è supplementare di $\hat{B}$ perché il quadrilatero è inscritto in una circonferenza.

$\hat{A} = 180° - 45° = 135°$
$\hat{D} = 180° - 81° = 99°$

28 Calcola le ampiezze degli angoli del quadrilatero ABCD in figura.



Il triangolo AOB è isoscele perché AO = OB = raggio. Gli angoli alla base sono congruenti, perciò:

$O\hat{A}B = 50°$ e $A\hat{O}B = 180° - 2 \cdot 50° = 80°$

Il triangolo AOD è isoscele perché AO = OD = raggio; l'angolo $A\hat{O}D$ è ampio 60°, quindi il triangolo AOD è equilatero e perciò $A\hat{D}O = O\hat{A}D = 60°$.
L'angolo $D\hat{O}C$ è esplementare di $(B\hat{O}C + B\hat{O}A + A\hat{O}D)$, quindi:

$$D\hat{O}C = 360° - (B\hat{O}C + B\hat{O}A + A\hat{O}D) = 360° - (120° + 80° + 60°) = 100°$$

Il triangolo ODC è isoscele con vertice $D\hat{O}C = 100°$, quindi:

$$O\hat{D}C = D\hat{C}O = \frac{180° - 100°}{2} = 40°$$

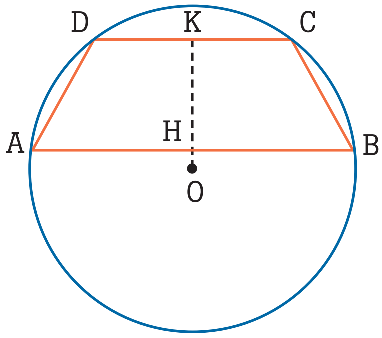
Osservando la figura otteniamo:

$B\hat{A}D = B\hat{A}O + O\hat{A}D = (50° + 60°) = 110°$
$D\hat{C}B = D\hat{C}O + O\hat{C}B = (40° + 30°) = 70°$
$A\hat{D}C = A\hat{D}O + O\hat{D}C = (60° + 40°) = 100°$
$A\hat{B}C = C\hat{B}O + O\hat{B}A = (30° + 50°) = 80°$

29 In una circonferenza di centro O considera due corde parallele AB e CD lunghe rispettivamente 120 cm e 78 cm; la corda AB dista dal centro 25 cm e la corda CD 52 cm. Calcola la distanza tra le due corde e descrivi il quadrilatero ABCD.

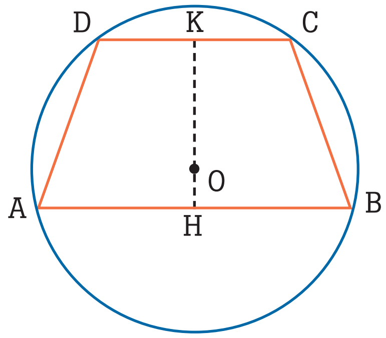
Il testo non specifica la posizione delle corde rispetto al centro; consideriamo i due casi:

PRIMO CASO



$HK = OK - OH = 52\text{ cm} - 25\text{ cm} = 27\text{ cm}$

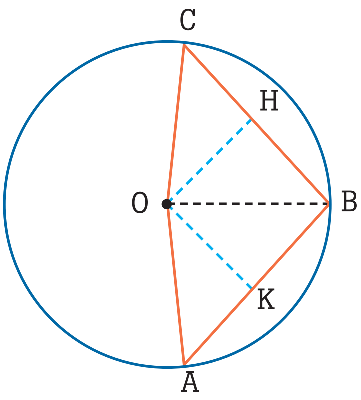
SECONDO CASO



$HK = OK + OH = 52\text{ cm} + 25\text{ cm} = 77\text{ cm}$

In entrambi i casi il quadrilatero ABCD è un trapezio isoscele: il trapezio rettangolo e il trapezio scaleno non sono mai inscrivibili in una circonferenza.

30 In una circonferenza con il raggio lungo 10 cm sono tracciate due corde congruenti con un estremo in comune, ognuna delle quali è lunga 16 cm. Calcola l'area del quadrilatero formato dalle due corde e dai due raggi tracciati dal centro della circonferenza agli estremi delle corde.



$OC = OA = r = 10\text{ cm}$
$AB = BC = 16\text{ cm}$
$A_{CBAO} = ?$

Dal centro O della circonferenza tracciamo le due distanze OH e OK delle corde BC e AB dal centro O. Tali distanze passano per i punti medi H e K delle corde CB e AB. Le corde CB e AB sono congruenti, quindi OK = OH.
Consideriamo il triangolo OAK, rettangolo in K, e applichiamo il teorema di Pitagora:

$$AK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 16\text{ cm} = 8\text{ cm}$$

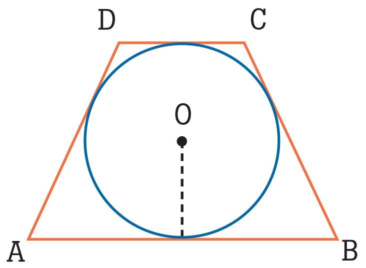
$$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 8^2}\text{ cm} = \sqrt{36}\text{ cm} = 6\text{ cm}$$

Il quadrilatero OABC è formato dai due triangoli ABO e CBO equivalenti perché perché hanno le basi e le altezze rispettivamente congruenti.

$$A_{CBAO} = 2 \cdot A_{ABO} = 2 \cdot \frac{AB \cdot OK}{2} =$$

$$= AB \cdot OK = (16 \cdot 6)\text{ cm}^2 = 96\text{ cm}^2$$

31 Il perimetro di un trapezio isoscele circoscritto a una circonferenza è lungo 120 cm. Sapendo che la base minore è $\frac{2}{3}$ della maggiore, calcola la lunghezza dei lati obliqui e delle basi del trapezio.



$2p = 120$ cm

$\text{CD} = \frac{2}{3}\,\text{AB}$

AD = CB = ?

AB = ?

CD = ?

Briciole di teoria

In ogni quadrilatero circoscritto a una circonferenza la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due, cioè al semiperimetro.

$\text{AB} + \text{CD} = \text{AD} + \text{CB} = p \Rightarrow \text{AB} + \text{CD} = 120 \text{ cm} : 2 = 60 \text{ cm}$

$\text{AD} + \text{CB} = 120 \text{ cm} : 2 = 60 \text{ cm}$

Il trapezio è isoscele, quindi AD = BC, ma AD + BC = 60 cm, perciò: AD = BC = 60 cm : 2 = 30 cm

$\text{CD} = \frac{2}{3}\text{AB}$

CD ⇒

AB ⇒

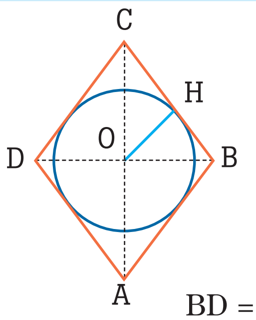
AB + CD ⇒

60 cm : 5 = 12 cm ⇒

12 cm · 2 = 24 cm ⇒ CD

12 cm · 3 = 36 cm ⇒ AB

32 Calcola la lunghezza della circonferenza inscritta in un rombo con le diagonali lunghe 30 cm e 40 cm.



BD = 30 cm

AC = 40 cm

c = ?

Il raggio OH è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo OBC:

30 cm : 2 = 15 cm ⇒ OB

40 cm : 2 = 20 cm ⇒ OC

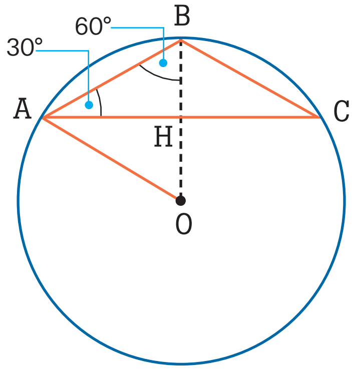
Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo OBC:

$$\text{BC} = \sqrt{\text{CO}^2 + \text{OB}^2} = \sqrt{20^2 + 15^2}\ \text{cm} = \sqrt{625}\ \text{cm} = 25\ \text{cm}$$

$$h_i = \frac{c_1 \cdot c_2}{i} \Rightarrow \text{OH} = \frac{\text{OB} \cdot \text{OC}}{\text{BC}} = \frac{15 \cdot 20}{25}\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$$

$c = 2\pi r = 2\pi\text{OH} = 2 \cdot \pi \cdot 12 \text{ cm} = 24\pi \text{ cm}$

33 Un triangolo isoscele ha l'angolo al vertice ampio 120° e ciascuno dei lati obliqui lungo 24 cm. Calcola il perimetro del triangolo e la lunghezza del raggio della circonferenza circoscritta.



$\text{A}\hat{\text{B}}\text{C} = 120°$

AB = BC = 24 cm

$2p_{\text{ABC}}$ = ? OA = ?

Il triangolo ABH ha gli angoli $\hat{\text{A}} = 30°$, $\hat{\text{B}} = 60°$, $\hat{\text{H}} = 90°$ ed è la metà del triangolo equilatero ABO; da ciò segue AB = BO = AO e quindi il raggio della circonferenza circoscritta è lungo 24 cm.

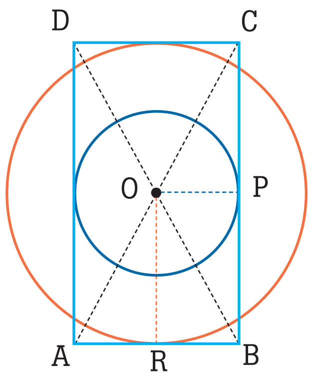
$$\text{BH} = \frac{1}{2}\text{AB} = \frac{1}{2} \cdot 24 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$

$$\text{AH} = \frac{1}{2}\text{AB}\sqrt{3} = \frac{24 \cdot \sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = 20{,}784 \text{ cm}$$

$\text{AC} = 2\text{AH} = (2 \cdot 20{,}784) \text{ cm} = 41{,}568 \text{ cm}$

$2p_{\text{ABC}} = \text{AC} + \text{AB} + \text{BC} = (41{,}568 + 24 + 24) \text{ cm} = 89{,}568 \text{ cm}$

34 Il perimetro di un rettangolo è lungo 48 cm e la base è i $\frac{3}{5}$ dell'altezza. Calcola l'area della corona circolare delimitata dalle due circonferenze aventi il centro nel punto di intersezione delle diagonali e tangenti rispettivamente ai lati minori e ai lati maggiori del rettangolo.



$2p = 48$ cm

$AB = \frac{3}{5} BC$

$A_{\text{corona circolare}} = ?$

AB $\Rightarrow$

BC $\Rightarrow$

AB + BC $\Rightarrow$

$AB + BC = \frac{2p}{2} = \frac{48}{2}$ cm $= 24$ cm

24 cm : 8 = 3 cm $\Rightarrow$

3 cm · 3 = 9 cm $\Rightarrow$ AB

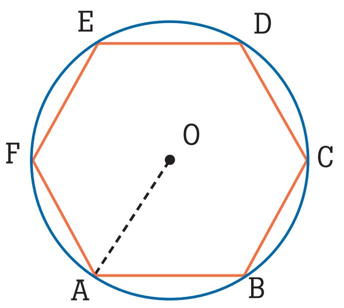
3 cm · 5 = 15 cm $\Rightarrow$ BC

$r_{\text{minore}} = OP = \frac{1}{2} AB = 9 \text{ cm} : 2 = 4{,}5 \text{ cm}$

$r_{\text{maggiore}} = OR = \frac{1}{2} BC = 15 \text{ cm} : 2 = 7{,}5 \text{ cm}$

$A_{\text{corona circolare}} = \pi(7{,}5^2 - 4{,}5^2) \text{ cm}^2 = \pi(56{,}25 - 20{,}25) \text{ cm}^2 = 36\pi \text{ cm}^2$

35 Un esagono regolare inscritto in una circonferenza ha il perimetro lungo 42 cm. Calcola la lunghezza della circonferenza.



$2p = 42$ cm $\qquad c = ?$

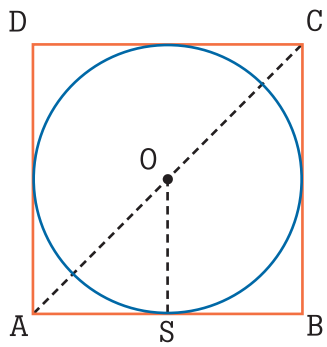
$AB = \frac{2p}{6} = \frac{42}{6}$ cm $= 7$ cm $= AO$

$c = 2\pi r = 2\pi AO = (2 \cdot \pi \cdot 7) \text{ cm} = 14\pi \text{ cm}$

Briciole di teoria

L'esagono regolare inscritto in una circonferenza ha il lato uguale al raggio.

36 Un quadrato circoscritto a una circonferenza ha la diagonale lunga 21,21 cm. Calcola la lunghezza della circonferenza.



$AC = 21{,}21$ cm

$c = ?$

$l = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{21{,}21}{1{,}414}$ cm $= 15$ cm

$OS = 15 \text{ cm} : 2 = 7{,}5 \text{ cm}$

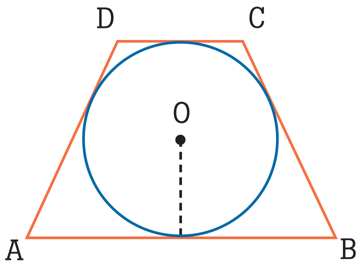
$c = 2\pi r = 2\pi OS = (2 \cdot \pi \cdot 7{,}5) \text{ cm} = 15\pi \text{ cm}$

Briciole di teoria

Ricordiamo le formule valide per il quadrato:

$d = l\sqrt{2} \qquad l = \frac{d}{\sqrt{2}}$

37 Un trapezio isoscele circoscritto a una circonferenza ha un lato lungo 32 cm e una delle basi lunga 27 cm. Determina la lunghezza dell'altra base.

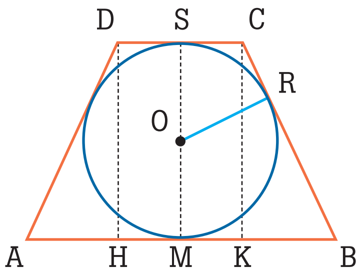


$AD = CB = 32$ cm
$CD = 27$ cm
$AB = ?$

Briciole di teoria
In ogni quadrilatero circoscritto una circonferenza la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due, cioè al semiperimetro.

$AD + BC = AB + DC = (32 + 32)$ cm $= 64$ cm
$AB = 64$ cm $- DC = (64 - 27)$ cm $= 37$ cm

38 Un trapezio isoscele è circoscritto a una circonferenza e le sue basi sono lunghe rispettivamente 8 cm e 18 cm. Calcola la lunghezza di ciascun lato obliquo e la lunghezza dell'altezza del trapezio e del raggio della circonferenza.



$DC = 8$ cm
$AB = 18$ cm
$AD = BC = ?$
$DH = ?$
$OR = ?$

$AD + BC = AB + DC$ perchè il trapezio è circoscritto alla circonferenza, quindi:
$AD + BC = (18 + 8)$ cm $= 26$ cm
$AD = BC = 26$ cm $: 2 = 13$ cm

In un trapezio isoscele le proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore sono congruenti:

$$AH = KB = \frac{AB - DC}{2} = \frac{18 - 8}{2} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

Il triangolo ADH è rettangolo in H, quindi applichiamo il teorema di Pitagora:

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} \text{ cm} = \sqrt{144} \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$

Il segmento $DH = SM$ è uguale al diametro della circonferenza inscritta perché è pari alla distanza tra le due basi parallele che sono entrambe tangenti alla circonferenza.

$$r = OS = OM = OR = \frac{SM}{2} = \frac{12}{2} \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$