Equivalenza di figure piane

SEZ. L

- Isoperimetria ed equivalenza di figure piane
- Area di triangoli e quadrilateri
- Teorema di Pitagora e sue applicazioni

Isoperimetria ed equivalenza di figure piane

1 **Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

a V F Figure congruenti sono sempre equivalenti.

b V F Figure equivalenti sono sempre congruenti.

c V F Due figure equivalenti a una terza figura sono equivalenti fra loro.

d V F Due figure sono equivalenti se hanno lo stesso perimetro.

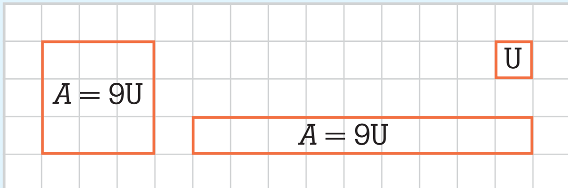
e V F Due figure isoperimetriche sono sempre anche equivalenti.

f V F Se due figure piane sono composte da parti rispettivamente congruenti tra loro, hanno la stessa area.

g V F Due figure sovrapponibili sono equivalenti e isoperimetriche.

a V Perché due figure congruenti sono sovrapponibili, hanno perciò la stessa area.

b F Perché due figure possono avere la stessa area ma non essere congruenti. Osserva la figura sottostante:



c V Perché se le figure A e C hanno la stessa area e se le figure B e C hanno la stessa area, necessariamente A ha la stessa area di B, cioè l'equivalenza gode della proprietà transitiva.

d F Due figure equivalenti hanno, per certo, solo la stessa estensione.

e F Due figure isoperimetriche hanno, per certo, solo lo stesso perimetro.

f V Le figure equiscomponibili occupano parti di piano uguali quindi sono equivalenti: hanno la stessa area.

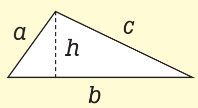
g V Due figure sovrapponibili sono congruenti quindi hanno la stessa estensione; anche i loro contorni sono congruenti e quindi hanno lo stesso perimetro.

Area di triangoli e quadrilateri

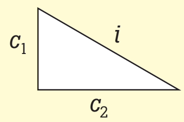
Briciole di teoria

- **Formule dirette e inverse per l'area dei triangoli**

$A = \frac{b \cdot h}{2}$ ➔ $b = \frac{A \cdot 2}{h}$ ➔ $h = \frac{A \cdot 2}{b}$ Vale per tutti i triangoli.



$A = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$ ➔ $c_1 = \frac{A \cdot 2}{c_2}$ ➔ $c_2 = \frac{A \cdot 2}{c_1}$ Vale per i triangoli rettangoli.



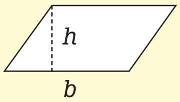
$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$

Formula di Erone; vale per tutti i triangoli di lati a, b, c con p = semiperimetro $= \frac{a+b+c}{2}$.

• Formule dirette e inverse per l'area dei quadrilateri

Briciole di teoria

PARALLELOGRAMMA

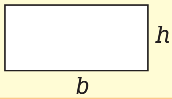


$A = b \cdot h$

$b = \dfrac{A}{h}$

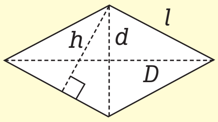
$h = \dfrac{A}{b}$

RETTANGOLO



$A = b \cdot h$ ➧ $b = \dfrac{A}{h}$ ➧ $h = \dfrac{A}{b}$

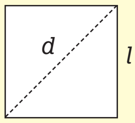
ROMBO



$A = \dfrac{D \cdot d}{2}$ ➧ $D = \dfrac{A \cdot 2}{d}$ ➧ $d = \dfrac{A \cdot 2}{D}$

$A = l \cdot h$ ➧ $l = \dfrac{A}{h}$ ➧ $h = \dfrac{A}{l}$

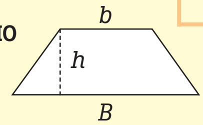
QUADRATO



$A = l^2$ ➧ $l = \sqrt{A}$

$A = \dfrac{d^2}{2}$ ➧ $d = \sqrt{A \cdot 2}$

TRAPEZIO



$A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$ ➧ $h = \dfrac{A \cdot 2}{B + b}$ ➧ $B + b = \dfrac{A \cdot 2}{h}$

2 **Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

a V F Se le due dimensioni di un rettangolo sono lunghe come le diagonali di un rombo, le due figure sono equivalenti.

b V F Un qualunque triangolo è equivalente alla metà di un parallelogramma avente la stessa base e la stessa altezza.

c V F Due rettangoli equivalenti hanno le dimensioni congruenti.

d V F Due quadrati equivalenti hanno i perimetri congruenti.

e V F Un triangolo rettangolo è equivalente a un rettangolo avente per dimensioni i cateti del triangolo.

a F Perché l'area di un rombo è data dalla formula $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$ e l'area del rettangolo dalla formula $A = b \cdot h$, quindi, con le condizioni date, il rettangolo è equivalente al doppio del rombo.

b V Perché l'area del triangolo è data dalla formula $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$ e l'area del parallelogramma dalla formula $A = b \cdot h$.

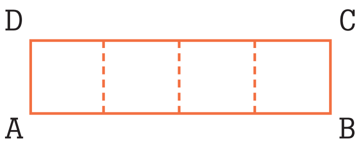
c F Perché ad esempio il rettangolo con le dimensioni lunghe 3 cm e 4 cm e il rettangolo con le dimensioni lunghe 2 cm e 6 cm hanno la stessa area, uguale a 12 cm^2, ma le dimensioni sono diverse.

d V Perché due quadrati equivalenti hanno la stessa area, quindi necessariamente hanno i lati congruenti e di conseguenza sono congruenti anche i perimetri.

e F Infatti l'area del triangolo è equivalente a metà dell'area del rettangolo.

Risolvi i seguenti problemi sui triangoli e quadrilateri.

3 Calcola il perimetro di un rettangolo con la base che è il quadruplo dell'altezza e l'area di 324 dm^2.

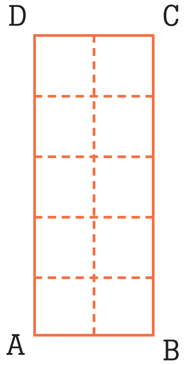


AB = 4AD
A = 324 dm^2
$2p$ = ?

Dopo aver disegnato il rettangolo rispettando le ipotesi (AB = 4AD), dividiamo il lato AB in 4 parti, ciascuna congruente al lato AD; osserviamo quindi che il rettangolo risulta scomposto in 4 quadrati tra loro congruenti.

324 dm^2 : 4 = 81 dm^2 $\Rightarrow$ area di un quadrato
$\sqrt{81}$ dm = 9 dm $\Rightarrow$ AD
9 dm · 4 = 36 dm $\Rightarrow$ AB
$2p$ = 2(AB + AD) = 2(36 + 9) dm = 90 dm

4 Calcola la lunghezza del perimetro di un rettangolo, sapendo che la base è i $\frac{2}{5}$ dell'altezza e l'area è 40 cm^2.



$AB = \frac{2}{5}\ BC$

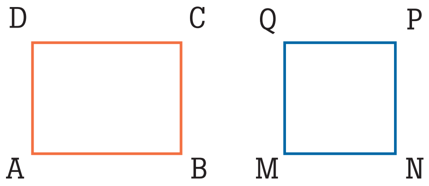
$A = 40\ cm^2$

$2p = ?$

Dopo aver disegnato il rettangolo rispettando le ipotesi ($AB = \frac{2}{5}\ BC$), dividiamo i lati AD e BC in cinque parti congruenti e i lati DC e AB in due parti congruenti: per le ipotesi fatte tutte queste parti sono tra loro congruenti, quindi osserviamo che il rettangolo risulta scomposto in 10 quadrati tra loro congruenti.

$40\ cm^2 : 10 = 4\ cm^2$ ⇒ area di un quadrato
$\sqrt{4}\ cm = 2\ cm$ ⇒ lato del quadrato
$2\ cm \cdot 2 = 4\ cm$ ⇒ AB
$2\ cm \cdot 5 = 10\ cm$ ⇒ BC
$2p = 2(AB + BC) = 2(4 + 10)\ cm = 28\ cm$

5 Un rettangolo è equivalente ai $\frac{6}{5}$ di un quadrato. Determina l'area del quadrato, sapendo che il perimetro del rettangolo è lungo 140 m e che una dimensione è $\frac{3}{4}$ dell'altra.



$2p_{ABCD} = 140\ m$

$CB = \frac{3}{4}\ AB$

$A_{ABCD} = \frac{6}{5}\ A_{MNPQ}$

$A_{MNPQ} = ?$

CB ⇒
AB ⇒

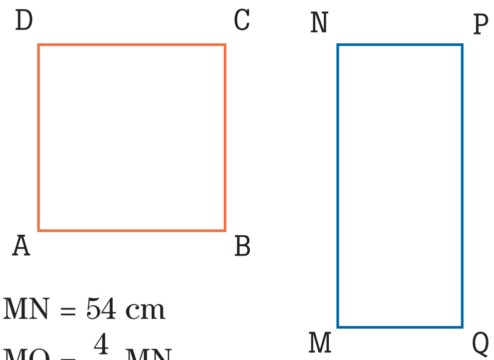
Il perimetro è formato da 14 parti congruenti.

$140\ m : 14 = 10\ m$ ⇒ lunghezza di una parte
$10\ m \cdot 3 = 30\ m$ ⇒ CB
$10\ m \cdot 4 = 40\ m$ ⇒ AB
$A_{ABCD} = (40 \cdot 30)\ m^2 = 1200\ m^2$

Il rettangolo è equivalente ai $\frac{6}{5}$ del quadrato, quindi:

$A_{MNPQ} = 1200\ m^2 : \frac{6}{5} = 1000\ m^2$

6 Determina il perimetro di un quadrato equivalente a un rettangolo avente l'altezza lunga 54 cm e la base che è i $\frac{4}{9}$ dell'altezza.



$MN = 54\ cm$

$MQ = \frac{4}{9}\ MN$

$2p_{ABCD} = ?$

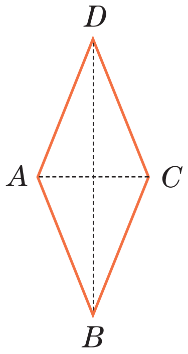
$54\ cm \cdot \frac{4}{9} = 24\ cm$ ⇒ MQ

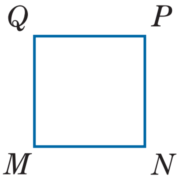
$A_{MNPQ} = (24 \cdot 54)\ cm^2 = 1296\ cm^2$

$\sqrt{1296}\ cm = 36\ cm$ ⇒ AB

$2p_{ABCD} = 36\ cm \cdot 4 = 144\ cm$

7 Le diagonali di un rombo sono una i $\frac{5}{2}$ dell'altra e la loro differenza è lunga 15 cm. Determina l'area del rombo e il perimetro del quadrato equivalente ai $\frac{4}{5}$ del rombo.





$BD = \frac{5}{2}\,AC$

$BD - AC = 15$ cm

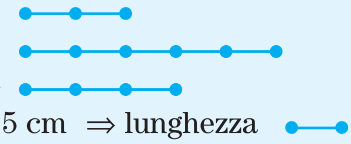
$A_{MNPQ} = \frac{4}{5}\,A_{ABCD}$

$A_{ABCD} = ?$ $\quad 2p_{MNPQ} = ?$

AC ⇒

BD ⇒

BD – AC ⇒



15 cm : 3 = 5 cm ⇒ lunghezza

5 cm · 2 = 10 cm ⇒ AC

5 cm · 5 = 25 cm ⇒ BD

$A_{ABCD} = \frac{25 \cdot 10}{2}\ \text{cm}^2 = 125\ \text{cm}^2$

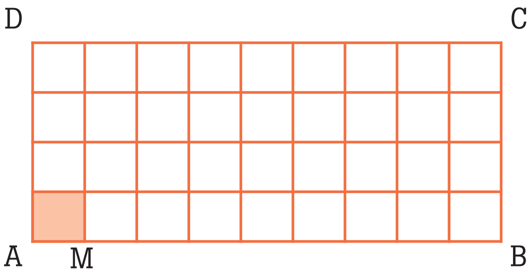
L'area del quadrato è uguale ai $\frac{4}{5}$ dell'area del rombo,

quindi: $125\ \text{cm}^2 \cdot \frac{4}{5} = 100\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_{MNPQ}$

$\sqrt{100}\ \text{cm} = 10\ \text{cm} \Rightarrow MN$

$2p_{MNPQ} = 10\ \text{cm} \cdot 4 = 40\ \text{cm}$

8 In un rettangolo l'area è di 144 cm^2 e l'altezza è i $\frac{4}{9}$ della base. Calcola il perimetro del rettangolo.



$A_{ABCD} = 144\ \text{cm}^2$ $\quad AD = \frac{4}{9}AB$

$2p_{ABCD} = ?$

Disegniamo un rettangolo con la base di 9 quadretti e l'altezza di 4, e osserviamo che il rettangolo ABCD contiene 36 quadretti come quello colorato. Per trovare l'area di un quadretto dividiamo l'area di ABCD per 36.

$A_q = A_{rettangolo} : 36 = 144\ \text{cm}^2 : 36 = 4\ \text{cm}^2$

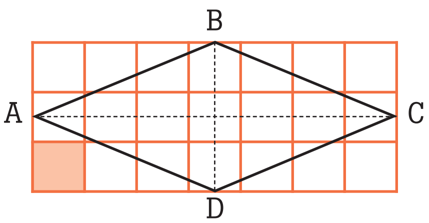
$AM = \sqrt{4}\ \text{cm} = 2\ \text{cm}$

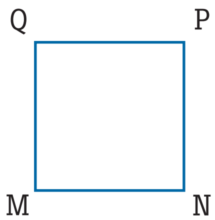
$AD = 2\ \text{cm} \cdot 4 = 8\ \text{cm}$

$AB = 2\ \text{cm} \cdot 9 = 18\ \text{cm}$

$2p = 2(AD + AB) = 2(8 + 18)\ \text{cm} = 52\ \text{cm}$

9 Un rombo ha l'area di 42 cm^2 e il rapporto fra le diagonali uguale a $\frac{3}{7}$. Calcola la lunghezza di ciascuna diagonale e il perimetro del quadrato equivalente ai $\frac{6}{7}$ del rombo.





$A_{ABCD} = 42\ \text{cm}^2$ $\quad A_{MNPQ} = \frac{6}{7}A_{ABCD}$ $\quad \frac{BD}{AC} = \frac{3}{7}$

$BD = ?$ $\quad AC = ?$ $\quad 2p_{MNPQ} = ?$

Disegniamo il rombo rispettando i dati, cioè con la diagonale minore di 3 quadretti e la diagonale maggiore di 7 quadretti. Osserviamo che il rettangolo circoscritto al rombo ha le dimensioni pari alle diagonali del rombo.

Il rettangolo è formato da 21 quadretti come quello colorato, e l'area del rettangolo è doppia dell'area del rombo.

$42\ \text{cm}^2 \cdot 2 = 84\ \text{cm}^2 \Rightarrow$ area del rettangolo

$84\ \text{cm}^2 : 21 = 4\ \text{cm}^2 \Rightarrow$ area di un quadretto

$\sqrt{4}\ \text{cm} = 2\ \text{cm} \Rightarrow$ lato del quadrato

$3 \cdot 2\ \text{cm} = 6\ \text{cm} \Rightarrow$ BD

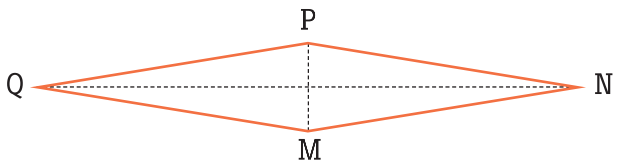
$7 \cdot 2\ \text{cm} = 14\ \text{cm} \Rightarrow$ AC

$42\ \text{cm}^2 \cdot \frac{6}{7} = 36\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_{\text{MNPQ}}$

$\sqrt{36}\ \text{cm} = 6\ \text{cm} \Rightarrow$ MN

$6\ \text{cm} \cdot 4 = 24\ \text{cm} \Rightarrow 2p_{\text{MNPQ}}$

10 Il perimetro di un quadrato è lungo 280 cm. Calcola la lunghezza di una diagonale del rombo equivalente al quadrato, sapendo che l'altra diagonale è i $\frac{4}{7}$ del lato del quadrato.

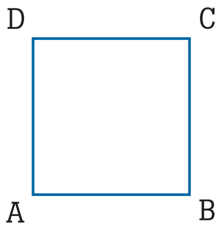


$2p_{\text{ABCD}} = 280\ \text{cm}$

$A_{\text{MNPQ}} = A_{\text{ABCD}}$

$\text{PM} = \frac{4}{7}\ \text{AB}$

$\text{QN} = ?$



$280\ \text{cm} : 4 = 70\ \text{cm} \Rightarrow$ AB

$70\ \text{cm} \cdot \frac{4}{7} = 40\ \text{cm} \Rightarrow$ PM

$(70\ \text{cm})^2 = 4900\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_{\text{ABCD}} = A_{\text{MNPQ}}$

$\text{QN} = \frac{2 \cdot A_{\text{MNPQ}}}{\text{PM}} = \frac{2 \cdot 4900}{40}\ \text{cm} = 245\ \text{cm}$

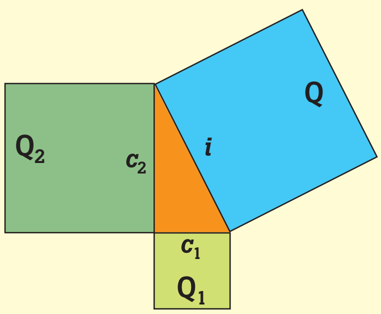
Teorema di Pitagora e sue applicazioni

Briciole di teoria

- **Teorema di Pitagora**

In un qualsiasi triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti.

$\mathbf{Q = Q_1 + Q_2}$ oppure $\boldsymbol{i^2 = c_1^{\ 2} + c_2^{\ 2}}$



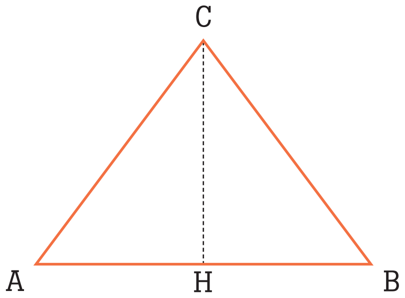
c_1 = cateto minore
c_2 = cateto maggiore
i = ipotenusa

Q_1 = quadrato di lato c_1
Q_2 = quadrato di lato c_2
Q = quadrato di lato i

Dalla relazione $i^2 = c_1^{\ 2} + c_2^{\ 2}$ segue: $i = \sqrt{c_1^{\ 2} + c_2^{\ 2}}$ $\quad c_1 = \sqrt{i^2 - c_2^{\ 2}}$ $\quad c_2 = \sqrt{i^2 - c_1^{\ 2}}$

Risolvi i seguenti problemi applicando il teorema di Pitagora.

11 In un triangolo isoscele il lato obliquo è lungo 75 cm e il perimetro è lungo 240 cm. Calcola l'area del triangolo.



AC = CB = 75 cm
$2p_{ABC}$ = 240 cm
A_{ABC} = ?

AB = (240 – 2 · 75) cm = 90 cm
Tracciamo l'altezza CH, perpendicolare alla base AB, e otteniamo il triangolo CHB rettangolo in H al quale possiamo applicare il teorema di Pitagora per determinare l'altezza CH del triangolo ABC; tale altezza è anche mediana relativa alla base.

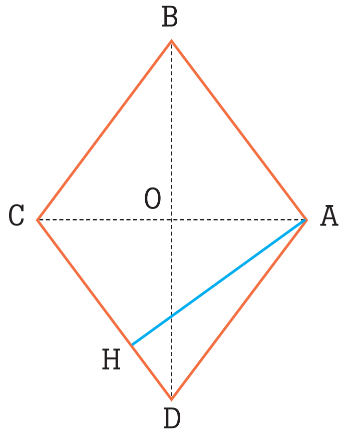
$$HB = \frac{1}{2}AB = 90 \text{ cm} : 2 = 45 \text{ cm}$$

$$CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{75^2 - 45^2} \text{ cm} =$$

$$= \sqrt{5625 - 2025} \text{ cm} = \sqrt{3600} \text{ cm} = 60 \text{ cm}$$

$$A_{ABC} = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{90 \cdot 60}{2} \text{ cm}^2 = 2700 \text{ cm}^2$$

12 In un rombo il lato è lungo 30 cm e la diagonale maggiore 48 cm. Calcola l'area del rombo e la lunghezza della sua altezza.



AB = 30 cm
BD = 48 cm
A_{ABCD} = ?
AH = ?

Il triangolo BOA è rettangolo in O perché in un rombo le diagonali sono perpendicolari e si tagliano scambievolmente a metà.
48 cm : 2 = 24 cm ⇒ BO
Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo BOA:

$$OA = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} \text{ cm} =$$

$$= \sqrt{900 - 576} \text{ cm} = \sqrt{324} \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

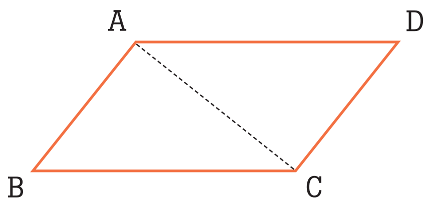
18 cm · 2 = 36 cm ⇒ AC

$$A_{ABCD} = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{48 \cdot 36}{2} \text{ cm}^2 = 864 \text{ cm}^2$$

Il rombo è un parallelogramma, quindi la sua area può essere calcolata anche con la formula $A = b \cdot h$ dove la base è uno dei lati.

$$AH = \frac{A}{CD} = \frac{864}{30} \text{ cm} = 28{,}8 \text{ cm}$$

13 In un parallelogramma la diagonale AC supera di 2,8 cm il lato AB. La loro somma è lunga 6,8 cm e inoltre la diagonale AC e il lato AB sono perpendicolari. Calcola la lunghezza del lato AB e della diagonale, il perimetro e l'area.



AC = AB + 2,8 cm
AC + AB = 6,8 cm
AC ⊥ AB

AB = ?
AC = ?
$2p$ = ?
A = ?

$\frac{6{,}8 - 2{,}8}{2}$ cm = 2 cm $\Rightarrow$ AB

(2 + 2,8) cm = 4,8 cm $\Rightarrow$ AC

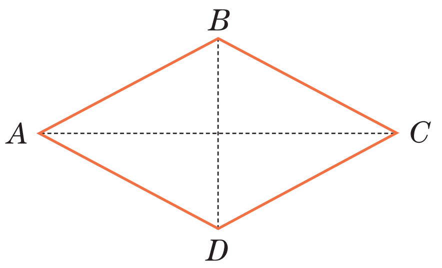
Il triangolo ABC è rettangolo in A perché AB e AC sono perpendicolari; applichiamo il teorema di Pitagora per ricavare il lato BC:

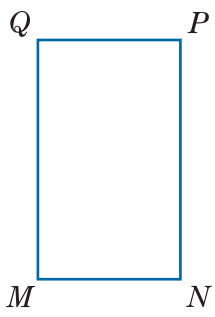
$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{4{,}8^2 + 2^2}\ \text{cm} = \sqrt{23{,}04 + 4}\ \text{cm} = \sqrt{27{,}04}\ \text{cm} = 5{,}2\ \text{cm}$$

Il parallelogramma ha i lati a due a due paralleli e congruenti: BC = AD e AB = CD, quindi:
$2p = 2 \cdot (5{,}2 + 2)$ cm = 14,4 cm
I due triangoli ABC e ACD sono congruenti, quindi l'area del parallelogramma è il doppio dell'area del triangolo ABC:

$$A_{ABCD} = 2\,\frac{AB \cdot AC}{2} = AB \cdot AC = (2 \cdot 4{,}8)\ \text{cm}^2 = 9{,}6\ \text{cm}^2$$

14 In un rombo la diagonale minore è lunga 16 cm e il perimetro 68 cm. Calcola la lunghezza della base di un rettangolo equivalente al rombo e alto 20 cm.





BD = 16 cm
$2p_{ABCD}$ = 68 cm
$A_{ABCD} = A_{MNPQ}$
PN = 20 cm
MN = ?

Il rombo ha quattro lati congruenti, quindi:
68 cm : 4 = 17 cm $\Rightarrow$ BC
Il triangolo BOC è rettangolo in O e le diagonali si tagliano a metà, perciò:
16 cm : 2 = 8 cm $\Rightarrow$ BO
Applichiamo il teorema di Pitagora per determinare OC:

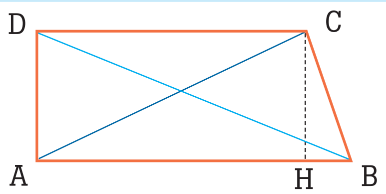
$$OC = \sqrt{BC^2 - BO^2} = \sqrt{17^2 - 8^2}\ \text{cm} =$$
$$= \sqrt{289 - 64}\ \text{cm} = \sqrt{225}\ \text{cm} = 15\ \text{cm}$$

15 cm · 2 = 30 cm $\Rightarrow$ AC

$$A_{ABCD} = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{16 \cdot 30}{2}\ \text{cm}^2 = 240\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_{MNPQ}$$

$$MN = \frac{A_{ABCD}}{PN} = \frac{240}{20}\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$$

15 Dato un trapezio rettangolo avente il perimetro lungo 228 cm, determina l'area e la lunghezza delle diagonali sapendo che l'altezza e il lato obliquo sono lunghi rispettivamente 35 cm e 37 cm.



$2p$ = 228 cm
AD = CH = 35 cm
BC = 37 cm

A_{ABCD} = ?
AC = ?
DB = ?

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo CHB rettangolo in H e determiniamo il cateto HB:

$$HB = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{37^2 - 35^2}\ \text{cm} =$$
$$= \sqrt{1369 - 1225}\ \text{cm} = \sqrt{144}\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$$

I segmenti DC e AH sono uguali:

$$AH = DC = \frac{2p - CB - HB - AD}{2} =$$
$$= \frac{228 - 37 - 12 - 35}{2}\ \text{cm} = 72\ \text{cm}$$

AB = AH + HB = (72 + 12) cm = 84 cm

$$A_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot CH}{2} = \frac{(84 + 72) \cdot 35}{2} \text{ cm}^2 = 2730 \text{ cm}^2$$

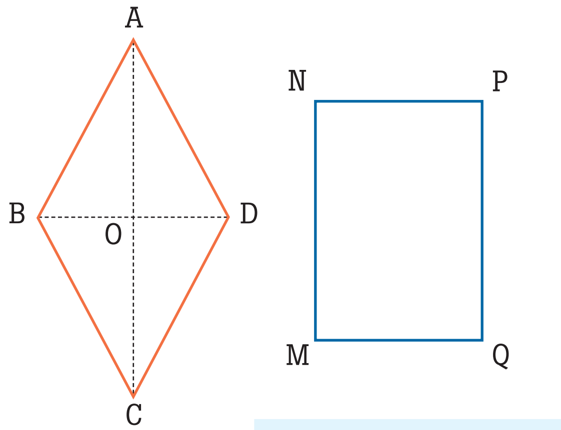
Il triangolo CHA è rettangolo in H; applichiamo il teorema di Pitagora per determinare la lunghezza dell'ipotenusa AC:

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{72^2 + 35^2} \text{ cm} = \sqrt{5184 + 1225} \text{ cm} = \sqrt{6409} \text{ cm} = 80{,}05 \text{ cm}$$

Il triangolo ADB è rettangolo in A; applichiamo il teorema di Pitagora per determinare la lunghezza dell'ipotenusa DB:

$$DB = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{35^2 + 84^2} \text{ cm} = \sqrt{1225 + 7056} \text{ cm} = \sqrt{8281} \text{ cm} = 91 \text{ cm}$$

16 Un rombo ha l'area di 240 cm^2 e una diagonale lunga 16 cm. Calcola il perimetro del rombo e l'area di un rettangolo isoperimetrico al rombo sapendo che una sua dimensione è i $\frac{7}{10}$ dell'altra.



A_{ABCD} = 240 cm^2
BD = 16 cm
$2p_{ABCD} = 2p_{MNPQ}$
$MQ = \frac{7}{10} MN$
$2p_{ABCD}$ = ?
A_{MNPQ} = ?

$$AC = \frac{2 \cdot A_{ABCD}}{BD} = \frac{2 \cdot 240}{16} \text{ cm} = 30 \text{ cm}$$

Le diagonali del rombo sono tra loro perpendicolari e si tagliano a metà; il triangolo BOC è rettangolo in O. Applichiamo il teorema di Pitagora e determiniamo l'ipotenusa BC:

$$BO = \frac{BD}{2} = 16 \text{ cm} : 2 = 8 \text{ cm}$$

$$OC = \frac{AC}{2} = 30 \text{ cm} : 2 = 15 \text{ cm}$$

$$BC = \sqrt{BO^2 + OC^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} \text{ cm} = \sqrt{64 + 225} \text{ cm} = \sqrt{289} \text{ cm} = 17 \text{ cm}$$

$2p_{ABCD}$ = 17 cm · 4 = 68 cm

MQ ⇒

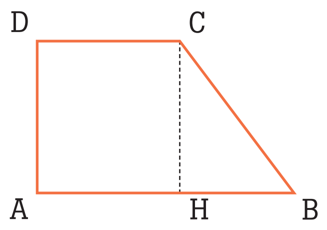
MN ⇒

Il perimetro del rettangolo è formato da 2 · (7 + 10) = 34 parti uguali, quindi:

68 cm : 34 = 2 cm ⇒ lunghezza di una parte
2 cm · 7 = 14 cm ⇒ MQ
2 cm · 10 = 20 cm ⇒ MN
A_{MNPQ} = (14 · 20) cm^2 = 280 cm^2

17 Un trapezio rettangolo ha la base maggiore uguale a $\frac{9}{5}$ della minore. Sapendo che l'area del trapezio è 1344 cm^2 e che l'altezza è lunga 32 cm, calcola il perimetro del trapezio.

$AB = \frac{9}{5} DC$
A_{ABCD} = 1344 cm^2
AD = CH = 32 cm
$2p_{ABCD}$ = ?



$$AB + CD = \frac{2 \cdot A}{CH} = \frac{2 \cdot 1344}{32} \text{ cm} = 84 \text{ cm}$$

AB ⇒

CD ⇒

La somma delle basi è formata da 9 + 5 = 14 parti uguali, quindi:

84 cm : 14 = 6 cm ⇒ lunghezza di una parte
6 cm · 9 = 54 cm ⇒ AB
6 cm · 5 = 30 cm ⇒ DC

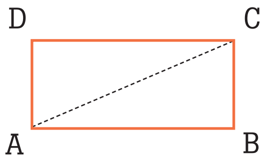
Il triangolo CHB è rettangolo in H. Applichiamo il teorema di Pitagora e determiniamo l'ipotenusa CB:

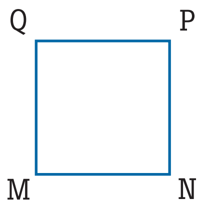
HB = AB – DC = (54 – 30) cm = 24 cm

$$BC = \sqrt{CH^2 + HB^2} = \sqrt{32^2 + 24^2}\ \text{cm} = \sqrt{1024 + 576}\ \text{cm} = \sqrt{1600}\ \text{cm} = 40\ \text{cm}$$

$2p$ = (54 + 40 + 30 + 32) cm = 156 cm

18 Un rettangolo è equivalente a un quadrato avente il lato lungo 18 cm. Sapendo che il rapporto fra le dimensioni del rettangolo è $\frac{4}{9}$, calcola il perimetro del rettangolo e la lunghezza della sua diagonale.





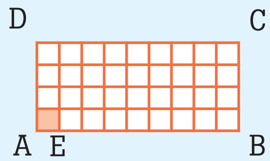
$A_{ABCD} = A_{MNPQ}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{4}{9}$

MN = 18 cm
$2p_{ABCD}$ = ?
AC = ?

$A_{MNPQ} = MN^2 = (18\ \text{cm})^2 = 324\ \text{cm}^2 = A_{ABCD}$

Sapendo che $\frac{AD}{AB} = \frac{4}{9}$, dividiamo le due dimensioni del rettangolo rispettivamente in 9 e 4 parti uguali:

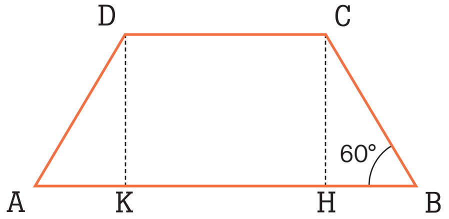


L'area del rettangolo è formata da 36 quadrati:
324 cm² : 36 = 9 cm² ⇒ area di un quadratino

$\sqrt{9}$ cm = 3 cm ⇒ AE
3 cm · 9 = 27 cm ⇒ BC = AD
3 cm · 4 = 12 cm ⇒ AB = CD
$2p$ = 2 · (27 + 12) cm = 78 cm
La diagonale divide il rettangolo in due triangoli rettangoli. Applichiamo il teorema di Pitagora per determinare AC:

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{27^2 + 12^2}\ \text{cm} = \sqrt{729 + 144}\ \text{cm} = 29{,}54\ \text{cm}$$

19 In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti alla base maggiore sono ampi 60°, il lato obliquo è lungo 16 cm e la base minore 18 cm. Calcola l'area del trapezio.



CD = 18 cm
AD = BC = 16 cm
$\hat{A} = \hat{B} = 60°$
A = ?

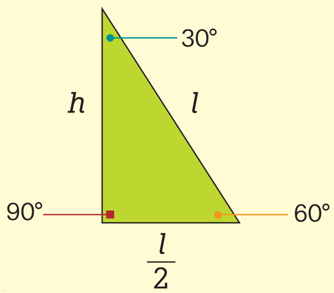
Briciole di teoria

- Triangolo con angoli di 30°, 60° e 90° (metà di un triangolo equilatero).

$h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$

$l = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{3} = 1{,}732$



Il triangolo CHB è rettangolo in H e ha gli angoli acuti ampi 30° e 60°; il cateto minore HB è la metà dell'ipotenusa e il cateto maggiore è uguale al cateto minore moltiplicato per $\sqrt{3}$:

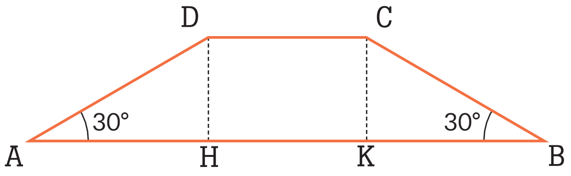
$HB = \dfrac{CB}{2} = 16\ cm : 2 = 8\ cm$

$CH = HB\sqrt{3} = 8\ cm \cdot 1{,}73 = 13{,}84\ cm$

$AB = CD + 2HB = (18 + 2 \cdot 8)\ cm = 34\ cm$

$$A = \frac{(AB+CD)\cdot CH}{2} = \frac{(34+18)\cdot 13{,}84}{2}\ cm^2 = 359{,}84\ cm^2$$

20 In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti alla base maggiore sono ampi 30°. L'altezza è lunga 4 cm e la base minore 6 cm. Calcola l'area.



DH = CK = 4 cm DC = 6 cm A = ?

Il triangolo AHD è rettangolo in H, il cateto DH è opposto all'angolo ampio 30°, quindi è uguale a metà dell'ipotenusa AD:

$AD = 2DH = 2 \cdot 4\ cm = 8\ cm$

In un triangolo rettangolo con gli angoli acuti ampi rispettivamente 30° e 60° il cateto maggiore è uguale al cateto minore moltiplicato per $\sqrt{3}$:

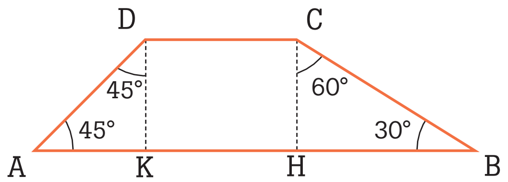
$AH = DH \cdot \sqrt{3} = 4\ cm \cdot 1{,}732 = 6{,}92\ cm$

Il trapezio è isoscele, AD = CB e AH = KB perché proiezioni di lati uguali.

$AB = AH + HK + KB = (6{,}92 + 6 + 6{,}92)\ cm = 19{,}84\ cm$

$$A = \frac{(AB+CD)\cdot DH}{2} = \frac{(19{,}84+6)\cdot 4}{2}\ cm^2 = 51{,}68\ cm^2$$

21 In un trapezio scaleno gli angoli adiacenti alla base maggiore sono ampi rispettivamente 45° e 30°; l'altezza è lunga 5 cm e la base minore CD 6 cm. Calcola il perimetro del trapezio.



DK = CH = 5 cm CD = 6 cm $2p$ = ?

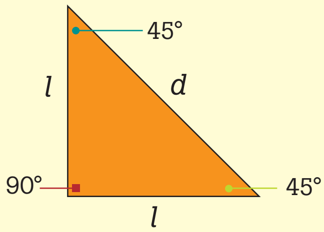
Briciole di teoria

- Triangolo con angoli di 45°, 45° e 90° (metà di un quadrato).

$d = l\sqrt{2}$

$l = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2} = 1{,}414$



Il triangolo rettangolo DKA è isoscele con AK = DK = 5 cm.

In un triangolo rettangolo isoscele l'ipotenusa è uguale al cateto moltiplicato per $\sqrt{2}$:

$AD = AK\sqrt{2} = 5\ cm \cdot 1{,}414 = 7{,}07\ cm$

Nel triangolo rettangolo CBH il cateto minore CH è opposto all'angolo ampio 30° e quindi è metà dell'ipotenusa BC, da cui possiamo ricavare:

$BC = 2CH = 2 \cdot 5\ cm = 10\ cm$

Nel triangolo rettangolo CBH il cateto maggiore HB è uguale al cateto minore moltiplicato per $\sqrt{3}$, quindi:

$HB = CH \cdot \sqrt{3} = 5\ cm \cdot 1{,}732 = 8{,}66\ cm$

$AB = AK + HK + BH = (5 + 6 + 8{,}66)\ cm = 19{,}66\ cm$

$2p = AB + CD + CB + AD = (19{,}66 + 6 + 10 + 7{,}07)\ cm = 42{,}73\ cm$