

# Le basi della geometria piana





SEZ. D

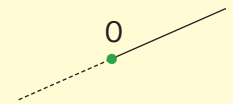
- Punti, rette, piani
- Segmenti, angoli, rette parallele e perpendicolari

## • Punti, rette, piani

1 Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- a V F** Per un punto passano infinite rette.
- b V F** Per due punti passa una sola retta.
- c V F** Per tre punti non passa alcuna retta.
- d V F** Su una retta ci sono molti punti.
- e V F** Un punto divide una retta in due parti uguali.
- f V F** Su una semiretta giacciono infiniti punti.
- g V F** Una retta  $a$  appartenente a un piano lo divide in due parti illimitate.

- La **retta** è una linea formata da infiniti punti allineati; è definita anche come una linea che mantiene sempre la stessa direzione.
- La **linea** è un ente geometrico con una sola dimensione e può essere curva , retta , mista , spezzata .
- La **semiretta** è ciascuna delle due parti in cui una retta viene divisa da un punto, detto **origine**; essa ha un punto di inizio, ma non una fine.
- Il **piano** è un ente geometrico illimitato che contiene infinite rette.
- Il **semipiano** è ciascuna delle due parti in cui un piano viene diviso da una retta posta su di esso.



- a V** Possiamo verificarlo graficamente: disegniamo un punto su un foglio e tracciamo con una riga delle rette passanti per quel punto: possiamo vedere che le possibili rette sono infinite.
- b V** Per due punti possono però passare infinite linee.
- c F** Se i punti sono allineati si può disegnare la retta che passa per essi. Tale retta è unica.



- d F** Su una retta ci sono infiniti punti: un insieme formato da molti punti, per quanto grande sia il numero di punti in esso contenuti, è sempre finito.
- e V** Ognuna delle due parti si dice semiretta.
- f V** Le due semirette individuate da un punto su una retta, prese assieme, contengono tutti i punti della retta, che come abbiamo visto sono infiniti.
- g V** Le due parti, dette semipiani, sono tra loro uguali, e hanno la retta come origine.

## • Segmenti, angoli, rette parallele e perpendicolari

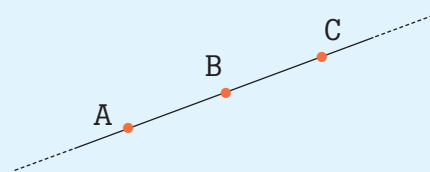
2 Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- a V F** Due segmenti sono consecutivi se hanno un punto in comune.
- b V F** Due segmenti consecutivi possono essere adiacenti.
- c V F** Il punto medio di un segmento divide a metà il segmento.
- d V F** Tre segmenti adiacenti formano una spezzata.

- Il **segmento** è la parte di retta compresa fra due punti detti **estremi**.
- Due segmenti sono **consecutivi** se hanno un estremo in comune.
- Due segmenti sono **adiacenti** se hanno un estremo in comune e giacciono sulla stessa retta.
- Si chiama **punto medio** di un segmento il punto che divide il segmento in due parti uguali tra loro.

- a F** Non sempre due segmenti che hanno un punto in comune sono consecutivi, perché il punto deve essere un estremo per entrambi i segmenti.
- b V** Due segmenti che oltre ad essere consecutivi giacciono sulla stessa retta sono detti adiacenti.
- c V** Per definizione il punto medio di un segmento lo divide in due parti uguali tra loro, ciascuna delle quali è quindi la metà del segmento dato.
- d F** I segmenti adiacenti giacciono sulla stessa retta. Quando si parla di spezzata si intende invece una linea costituita da diversi segmenti a due a due consecutivi, ma non adiacenti.

**3** Disegna una retta e posiziona su di essa tre punti A, B, C. Quante sono e come si chiamano le parti in cui la retta resta divisa?



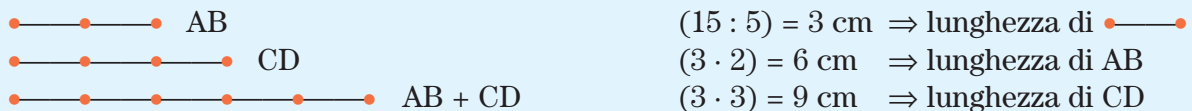
La retta rimane divisa in 4 parti che sono: una semiretta di origine A, una semiretta di origine C, due segmenti AB e BC.

**Risolvi i seguenti problemi.**

**4** La somma di due segmenti consecutivi è lunga 15 cm e uno è  $\frac{2}{3}$  dell'altro.

Determina le lunghezze dei segmenti e rappresentali graficamente.

Indichiamo i segmenti con AB e CD; procedendo col metodo grafico possiamo scrivere le ipotesi:  $AB + CD = 15$  cm e  $AB = \frac{2}{3} CD$ .



**5** Un segmento AB è lungo 4 cm e il segmento CD è lungo 16 cm.

Determina la misura del segmento  $MN = 3AB + \frac{5}{8}CD$ .

Ipotesi:  $AB = 4$  cm;  $CD = 16$  cm.

$$(4 \cdot 3) = 12 \text{ cm} \Rightarrow 3AB$$

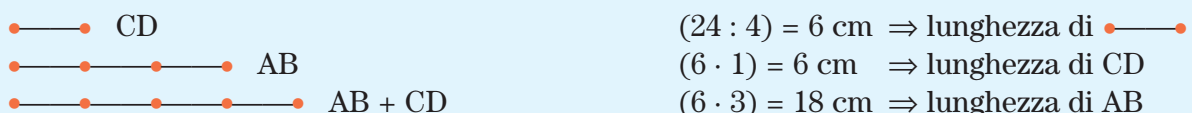
$$\left(16 \cdot \frac{5}{8}\right) = 10 \text{ cm} \Rightarrow \frac{5}{8}CD$$

$$(12 + 10) = 22 \text{ cm} \Rightarrow \text{lunghezza di MN}$$

**6** La somma di due segmenti AB e CD è lunga 24 cm e AB è triplo di CD. Determina la lunghezza dei due segmenti.

Risolviamo il problema applicando il metodo grafico.

Ipotesi:  $AB + CD = 24$  cm;  $AB = 3CD$ .



**7** I  $\frac{3}{4}$  del segmento AB sono pari a 15 cm. Determina la lunghezza del segmento AB e quella del suo adiacente CD, sapendo che è pari a  $\frac{2}{5}$  di AB.

Ipotesi:  $\frac{3}{4}AB = 15 \text{ cm}; \quad CD = \frac{2}{5}AB.$

La scrittura  $\frac{3}{4}AB$  significa che l'intero, cioè AB, è stato diviso in 4 parti uguali e ne sono state considerate 3, che corrispondono a 15 cm; si tratta di un problema fondamentale inverso. Per calcolare la lunghezza di ciascuna parte dobbiamo dividere 15 cm per 3; per calcolare AB dobbiamo moltiplicare il risultato per 4; utilizzando il calcolo frazionario si può sintetizzare:

$$\left(15 : \frac{3}{4}\right) = 20 \text{ cm} \Rightarrow \text{lunghezza di AB} \quad \left(20 \cdot \frac{2}{5}\right) = 8 \text{ cm} \Rightarrow \text{lunghezza di CD}$$

Indica la risposta esatta.

**8** Un angolo è una figura piana delimitata da:

- a** due segmenti con un estremo in comune.
- b** due semirette con l'origine in comune.
- c** due rette che si intersecano.

Dalla definizione la risposta esatta è **b**. Si può parlare però dell'angolo formato da due segmenti, che è l'angolo formato dalle semirette sostegno dei segmenti. Due rette che si intersecano individuano invece 4 angoli con vertice nel punto di intersezione.

- Si dice **angolo** la parte di piano compresa tra due semirette con l'origine in uno stesso punto detto **vertice**.

Briciole di teoria

**9** In un angolo piatto i lati:

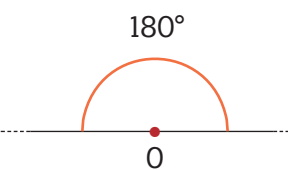
- a** sono uno il prolungamento dell'altro.
- b** sono segmenti adiacenti.
- c** sono segmenti consecutivi.

La risposta esatta è **a**; infatti i lati di un angolo piatto sono due semirette opposte e, come tali, una è il prolungamento dell'altra.

La risposta **b** non è formalmente corretta perché, per definizione, i lati di un angolo sono semirette e non segmenti.

La risposta **c** non è corretta sia per l'uso del termine segmento, sia perché i segmenti consecutivi non giacciono necessariamente sulla stessa retta come devono invece fare i lati di un angolo piatto.

- Un angolo è **piatto** se è formato da due semirette appartenenti alla stessa retta e aventi l'origine in comune.



Briciole di teoria

**10** Un angolo ampio  $91^\circ$  è:

- a** ottuso.
- b** acuto.
- c** quasi retto.

La risposta esatta è **a** perché un angolo con ampiezza maggiore di  $90^\circ$  è, per definizione, ottuso.

La risposta **b** è palesemente sbagliata perché se un angolo è ottuso non può essere acuto.

La risposta **c** non può nemmeno essere presa in considerazione perché in matematica non esiste il concetto di "quasi".

- Un angolo è **retto** se è la quarta parte dell'angolo giro.
- Un angolo è **ottuso** se è maggiore di un angolo retto.
- Un angolo è **acuto** se è minore di un angolo retto.

Briciole di teoria

**11 Due angoli opposti al vertice:**

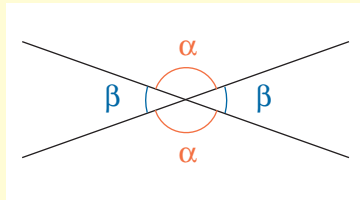
- a** giacciono nello stesso semipiano.
- b** hanno gli stessi lati.
- c** hanno la stessa ampiezza.

La risposta esatta è **c** perché sono supplementari dell'angolo adiacente ad entrambi e angoli supplementari di uno stesso angolo sono tra loro congruenti.

La risposta **a** è sbagliata perché la retta sostegno di ciascun lato divide il piano in due semipiani ciascuno dei quali contiene uno o l'altro degli angoli dati.

La risposta **b** è sbagliata perché gli angoli opposti al vertice non hanno lati in comune, ma i lati di uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

- Date due rette che si intersecano, sono **opposti al vertice** due angoli che non hanno lati in comune.



Briciole di teoria

**12 Due angoli supplementari:**

- a** sono sempre adiacenti.
- b** hanno sempre la somma delle ampiezze pari a  $180^\circ$ .
- c** possono essere entrambi acuti.

La risposta esatta è **b** perché un angolo piatto ha ampiezza pari a  $180^\circ$ .

La risposta **a** non è corretta perché l'essere adiacenti implica una posizione reciproca dei due angoli, che non è vincolante per determinare la somma delle ampiezze. Due angoli adiacenti sono comunque sempre supplementari.

La risposta **c** è sbagliata perché la somma di due angoli acuti non può essere  $180^\circ$ .

- Due angoli sono **complementari** se la loro somma è un angolo retto.
- Due angoli sono **supplementari** se la loro somma è un angolo piatto.

Briciole di teoria

**Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

**13 Due angoli supplementari possono essere:**

- a**    uno acuto e uno ottuso.
- b**    tutti e due acuti.
- c**    tutti e due ottusi.
- d**    tutti e due retti.

Le risposte esatte sono: **a V b F c F d V** perché due angoli sono supplementari se la somma delle loro ampiezze è  $180^\circ$ , quindi: un angolo acuto e uno ottuso possono avere per somma  $180^\circ$  ( $85^\circ + 95^\circ = 180^\circ$ ); due angoli acuti hanno per somma un angolo sicuramente minore di  $180^\circ$  ( $89^\circ + 89^\circ = 178^\circ$ ); due angoli ottusi hanno per somma un angolo sicuramente maggiore di  $180^\circ$  ( $91^\circ + 91^\circ = 182^\circ$ ); due angoli retti hanno sempre per somma un angolo di  $180^\circ$  ( $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ).

**14 Due angoli complementari possono essere:**

- a**    uno acuto e uno ottuso.
- b**    uno retto e uno acuto.
- c**    tutti e due acuti.
- d**    tutti e due ottusi.

Le risposte esatte sono: **a F b F c V d F** perché due angoli sono complementari se la somma delle loro ampiezze è  $90^\circ$ , quindi nessuno degli angoli addendi può essere di suo maggiore o uguale a  $90^\circ$ , cioè ad un angolo retto; l'unica possibilità di avere per somma  $90^\circ$  è che entrambi gli angoli siano minori di  $90^\circ$  e quindi acuti.

Risolvi i seguenti problemi.

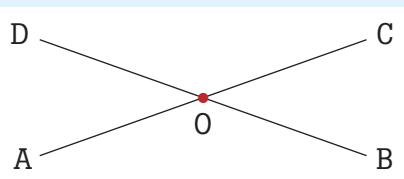
15 Determina il complementare di un angolo ampio  $53^\circ 30'$ .

Due angoli complementari hanno per somma  $90^\circ$ , quindi:

$$90^\circ - 53^\circ 30' = 89^\circ 60' - 53^\circ 30' = 36^\circ 30' \Rightarrow \text{ampiezza dell'angolo complementare dell'angolo dato.}$$

16 Uno degli angoli formati da due rette incidenti è ampio  $120^\circ$ . Determina l'ampiezza degli altri angoli formati dalle due rette.

Rappresentiamo graficamente due rette incidenti.



L'angolo dato è ampio  $120^\circ$ , quindi è ottuso; osservando la figura abbiamo:  
 $\hat{A}OB = 120^\circ$  e  $\hat{D}OC = 120^\circ$  perché gli angoli opposti al vertice sono uguali.

Inoltre  $\hat{A}OB$  e  $\hat{B}OC$  sono adiacenti e pertanto supplementari, quindi:

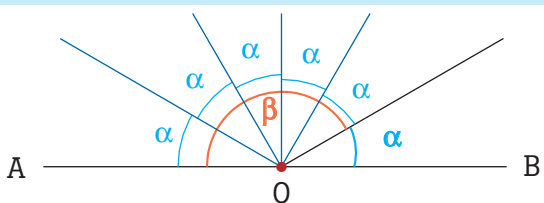
$$\hat{B}OC = 180^\circ - \hat{A}OB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\hat{D}OA = 60^\circ \text{ perché opposto al vertice di } \hat{B}OC.$$

17 Un angolo  $\alpha$  è la quinta parte del suo adiacente  $\beta$ . Determina l'ampiezza dell'angolo  $\alpha$  e quella del suo complementare.

$$\alpha + \beta = 180^\circ \quad \alpha = \frac{1}{5}\beta$$

Rappresentiamo graficamente i due angoli.:



Dalla figura vediamo che l'angolo  $\hat{A}OB$ , piatto, è formato da 6 parti uguali ampie  $\alpha$ , quindi possiamo scrivere:

$$(180^\circ : 6) = 30^\circ \Rightarrow \text{ampiezza di } \alpha$$

$$(30^\circ \cdot 5) = 150^\circ \Rightarrow \text{ampiezza di } \beta$$

$$\text{Il complementare di } \alpha \text{ è ampio } 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

- Due angoli sono **consecutivi** se hanno in comune il vertice ed un lato.
- Due angoli sono **adiacenti** se sono consecutivi e i lati non comuni appartengono alla stessa retta. Due angoli adiacenti sono supplementari.

Briciole di teoria

18 La somma di tre angoli è  $64^\circ$ . Calcola la loro ampiezza sapendo che il secondo e il terzo angolo sono rispettivamente il triplo e il quadruplo del primo angolo.

Indichiamo i tre angoli con  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ ; abbiamo:  $\alpha + \beta + \gamma = 64^\circ$ .



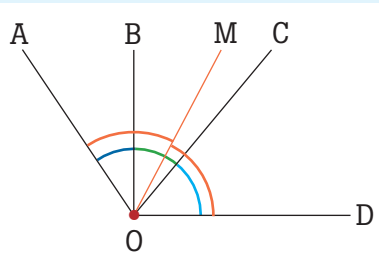
$$(64^\circ : 8) = 8^\circ \Rightarrow \text{ampiezza di } \alpha$$

$$(8^\circ \cdot 3) = 24^\circ \Rightarrow \text{ampiezza di } \beta$$

$$(8^\circ \cdot 4) = 32^\circ \Rightarrow \text{ampiezza di } \gamma$$

- 19** Disegna tre angoli consecutivi  $\widehat{AOB} = 34^\circ$ ,  $\widehat{BOC} = 40^\circ$ ,  $\widehat{COD} = 50^\circ$ , e conduci la bisettrice OM dell'angolo  $\widehat{AOD}$ . Determina l'ampiezza di ciascuno degli angoli che essa forma con le semirette OA, OB, OC, OD.

Disegniamo quanto richiesto dal problema.



Osservando la figura possiamo ricavare:

$$\begin{aligned} \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} &= 34^\circ + 40^\circ + 50^\circ = 124^\circ \\ \widehat{AOM} = \widehat{MOD} &= 124^\circ : 2 = 62^\circ \\ \widehat{BOM} &= \widehat{AOM} - \widehat{AOB} = 62^\circ - 34^\circ = 28^\circ \\ \widehat{MOC} &= \widehat{MOD} - \widehat{COD} = 62^\circ - 50^\circ = 12^\circ \end{aligned}$$

- La **bisettrice** di un angolo è la semiretta che divide l'angolo in due parti uguali.

Briciole di teoria

Indica la risposta esatta.

- 20** Due rette sono parallele quando:

- a non si incontrano.
- b si incontrano, ma fuori dal foglio.
- c appartengono allo stesso piano e non si incontrano.

La risposta esatta è  c.

La risposta  a è sbagliata perché non è specificato che le rette sono complanari: due rette che non si incontrano e non appartengono allo stesso piano sono dette sghembe.

La risposta  b è sbagliata perché se le rette si incontrassero fuori dal foglio su cui sono disegnate, si incontrerebbero comunque sul piano cui il foglio appartiene.

- Due **rette** sono **parallele** se sono complanari e non hanno punti in comune.

Briciole di teoria

- 21** Due rette sono perpendicolari quando:

- a sono incidenti e formano quattro angoli.
- b sono incidenti e formano quattro angoli retti.
- c sono incidenti e formano due coppie di angoli opposti al vertice congruenti.

La risposta esatta è  b: ciascuno dei quattro angoli formati dalle due rette perpendicolari è un quarto di un angolo giro, cioè un angolo retto.

La risposta  a è sbagliata perché due rette che si incontrano formano sempre quattro angoli, ma non sempre questi sono uguali tra loro: solo in tal caso si può parlare di angoli retti.

La risposta  c è sbagliata perché qualunque coppia di rette incidenti, anche se non perpendicolari, forma coppie di angoli opposti al vertice tra loro congruenti.

- Due rette sono **perpendicolari** se sono incidenti e formano quattro angoli uguali.

Briciole di teoria

- 22** Le rette perpendicolari ad una retta data sono:

- a infinite.
- b più di una, ma non più di due.
- c una e una sola.

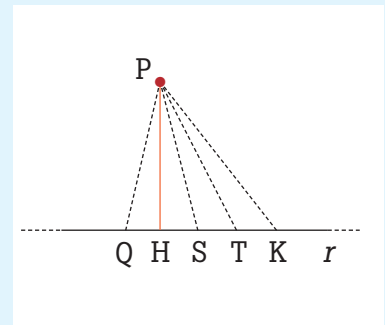
La risposta esatta è  a: per qualunque punto di una retta è possibile tracciare una perpendicolare alla retta data e, poiché la retta è costituita da infiniti punti, è possibile tracciare infinite rette perpendicolari.



**23** La distanza di un punto P da una retta:

- a** è la semiretta di origine P e perpendicolare alla retta.
- b** è un segmento con un estremo in P e uno sulla retta.
- c** è il segmento di perpendicolare condotto da P alla retta con un estremo in P e l'altro sul piede della perpendicolare.

La risposta esatta è **c**, infatti il termine distanza implica il concetto di minimo percorso da... a...; osserva la rappresentazione grafica nella figura accanto.



PH è perpendicolare alla retta  $r$ ; PQ, PS, PT, PK sono generici segmenti condotti da P a  $r$ ; si può vedere che il segmento minore è quello perpendicolare. Dallo stesso disegno deduciamo quindi che la risposta **b** è sbagliata.

La risposta **a** è sbagliata perché la distanza è una lunghezza misurabile e quindi finita, mentre la semiretta è infinita.

**24** L'asse del segmento è:

- a** una retta passante per il punto medio del segmento.
- b** la retta perpendicolare al segmento passante per il punto medio.
- c** una delle rette perpendicolari al segmento.

La risposta esatta è **b** perché per definizione l'asse deve essere perpendicolare al segmento, ma deve anche dividere il segmento stesso in due parti congruenti.

La risposta **a** è errata perché le rette passanti per il punto medio sono infinite.

La risposta **c** è errata perché si possono tracciare infinite rette perpendicolari al segmento, ma una sola divide il segmento stesso in due parti congruenti.

**25** Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- a** **V** **F** Due rette parallele tagliate da una trasversale formano otto angoli retti.
- b** **V** **F** Due rette parallele tagliate da una trasversale formano sempre angoli alterni interni supplementari.
- c** **V** **F** Due rette parallele tagliate da una trasversale formano sempre angoli corrispondenti congruenti.
- d** **V** **F** Due rette parallele tagliate da una trasversale formano angoli coniugati esterni complementari.

**a** **F** Perché si parla di una generica trasversale e non viene specificato che sia perpendicolare alle due rette parallele date.

**b** **F** Perché gli angoli alterni interni sono congruenti e non supplementari.

**c** **V** Perché gli angoli corrispondenti sono congruenti indipendentemente dalla posizione della trasversale.

**d** **F** Perché gli angoli coniugati esterni sono supplementari e non complementari.

**TEOREMA DELLE PARALLELE TAGLIATE DA UNA TRASVERSALE**

Due rette parallele tagliate da una trasversale formano:

angoli alterni interni uguali

$$\Rightarrow 3 = 5 ; 6 = 4$$

angoli alterni esterni uguali

$$\Rightarrow 2 = 8 ; 1 = 7$$

angoli corrispondenti uguali

$$\Rightarrow 2 = 6 ; 3 = 7 ; 1 = 5 ; 4 = 8$$

angoli coniugati interni supplementari

$$\Rightarrow 3 + 6 = 180^\circ ; 4 + 5 = 180^\circ$$

angoli coniugati esterni supplementari

$$\Rightarrow 2 + 7 = 180^\circ ; 1 + 8 = 180^\circ$$

